Inf Gen II

INFORMATICA GENERALE II

Ingegneria delle Telecomunicazioni
Università di Trento

Marco Roveri

roveri@irst.itc.it

Algoritmi di Ordinamento

AA 2005/2006

MR

Inf Gen II

Algoritmi di Ordinamento

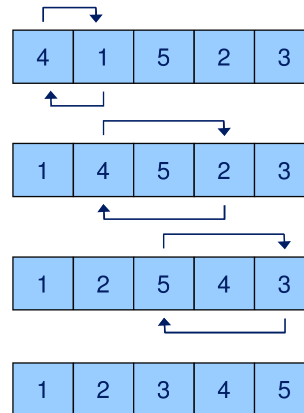
- Problema: dato un array di elementi (e.g. interi) riordinare gli elementi dell'array in modo che per ogni $1 \leq i \leq N - 1$, $A[i - 1] \leq A[i]$
- Esistono diversi algoritmi con diverse caratteristiche computazionali.
- Nel seguito analizzeremo gli algoritmi più utilizzati e ne discuteremo le caratteristiche.

AA 2005/2006

MR

Ordinamento per selezione

- Cerco elemento più piccolo dell'array e lo scambio con il primo elemento dell'array.
- Cerco il secondo elemento più piccolo e lo scambio con il secondo elemento dell'array.
- Proseguo in questo modo finché l'array non è ordinato.



Ordinamento per selezione

```
void selectionsort( int A[], int N) {
  for (int i = 0; i < N - 1; i++) {
    int min = i;
    for(int j = i + 1; j < N; j++)
      if (A[j] < A[min]) min = j
    swap(A[i], A[min]);
  }
}
```

Cerco elemento più piccolo nella parte di array ancora da ordinare.

Scambio elemento più piccolo trovato con il primo elemento dell'array ancora da rodinare.

Inf Gen II

Caratteristiche algoritmo ordinamento per selezione

- L'algoritmo di ordinamento per selezione effettua circa $n^2/2$ confronti ed n scambi in media.
- Il limite asintotico superiore è $O(n^2)$.

AA 2005/2006

MR

5

Inf Gen II

Ordinamento per inserzione

- È il metodo usato dai giocatori di carte per ordinare in mano le carte.
- Considero un elemento per volta e lo inserisco al proprio posto tra quelli già considerati (mantenendo questi ultimi ordinati).
  - l'elemento considerato viene inserito nel posto rimasto vacante in seguito allo spostamento di un posto a destra degli elementi più grandi.

AA 2005/2006

MR

6

Inf Gen II

Ordinamento per inserzione

5	2	4	6	1	3
2	5	4	6	1	3
2	4	5	6	1	3
2	4	5	6	1	3
1	2	4	5	6	3
1	2	3	4	5	6

AA 2005/2006

MR

Inf Gen II

Algoritmo per inserzione

```
void insertsort( int A[], int N) {
  for(int i = N – 1; i > 0; i--) // porto elemento più piccolo in A[0]
     if (A[i] < A[i-1]) swap(A[i], A[i-1]);
  for(int i = 2; i <= N -1; i++) {
     int j = i;    int v = A[i];
     while( v < A[j-1] ) {
        A[j] = A[j-1]; j--;
     }
     A[j] = v;
  }
}
```

AA 2005/2006

MR

Caratteristiche algoritmo ordinamento per inserzione

- L'algoritmo di ordinamento per inserzione effettua circa $n^2/4$ confronti ed $n^2/4$ scambi in media.
- Il limite asintotico superiore è $O(n^2)$.

Algoritmo Bubble Sort

- Si basa su scambi di elementi adiacenti se necessari, fino a quando non è più richiesto alcuno scambio e l'array risulta ordinato.

Algoritmo bubblesort

5	2	4	6	1	3
5	2	4	1	6	3
5	2	1	4	6	3
5	1	2	4	6	3
1	5	2	4	6	3
1	5	2	4	3	6

Algoritmo bubblesort

1	5	2	4	3	6
1	5	2	3	4	6
1	2	5	3	4	6
1	2	3	5	4	6
1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6

Algoritmo bubblesort

```
void bubblesort(int A[], int N) {
  for( int i = 0; i < N – 1; i++)
     for( int j = N - 1; j > i; j--)
       if (A[j] < A[j-1])
          swap(A[j-1], A[j]);
}
```

Inf Gen II

AA 2005/2006

MR

13

Caratteristiche algoritmo ordinamento bubblesort

- L'algoritmo di ordinamento bubblesort effettua circa $n^2/2$ confronti ed $n^2/2$ scambi in media.
- Il limite asintotico superiore è $O(n^2)$.

Inf Gen II

AA 2005/2006

MR

14

Merge di due array ordinati

- Problema: combinare due array ordinati A[N] e B[M] in un terzo array ordinato C[N+M].
- Usiamo un ciclo for che ad ogni iterazione *i* inserisce un elemento in C[*i*].
  - Se A si esaurisce prendiamo prossimi elementi da B;
  - Viceversa, se B si esaurisce prendiamo i prossimi elementi da A;
  - Se abbiamo elementi sia in A che in B, il prossimo elemento inserito *i* sarà il minore tra i due elementi A[*j*] e B[*k*], e incrementiamo il corrispondente indice.

Inf Gen II — AA 2005/2006 — MR

Merge di due array ordinati

```
int * mergeArray(int A[], int N, int B[], M) {
   int * C = new int [M+N];

   for(int i = 0, j = 0, k = 0; k < M + N; k++) {
      if (i == N) {
         C[k] = B[j++]; continue;
      }
      if (j == M) {
         C[k] = A[i++]; continue;
      }
      if (A[i] < B[j])
         C[k] = A[i++];
      else
         C[k] = B[j++];
   }
   return C;
}
```

Allocazione array per il risultato.

A si è esaurito: riempio C con B

B si è esaurito: riempio C con A

Riempio C con elemento minore tra A[i] e B[j], incrementando opportuno indice.

O(M + N)

Inf Gen II — AA 2005/2006 — MR

Inf Gen II

Merge di due array ordinati

```
void mergeArray(int A[], int N, int B[], M, int C[]) {
  for(int i = 0, j = 0, k = 0; k < M + N; k++) {
     if (i == N) {
        C[k] = B[j++]; continue;
     }
     if (j == M) {
        C[k] = A[i++]; continue;
     }
     if (A[i] < B[j])
         C[k] = A[i++];
     else
         C[k] = B[j++];
  }
}
```

Array per risultato passato come argomento. Deve avere dimensione per contenere tutti elementi di A e B.

O(M + N)

AA 2005/2006

MR

17

Inf Gen II

Ordinamento MergeSort

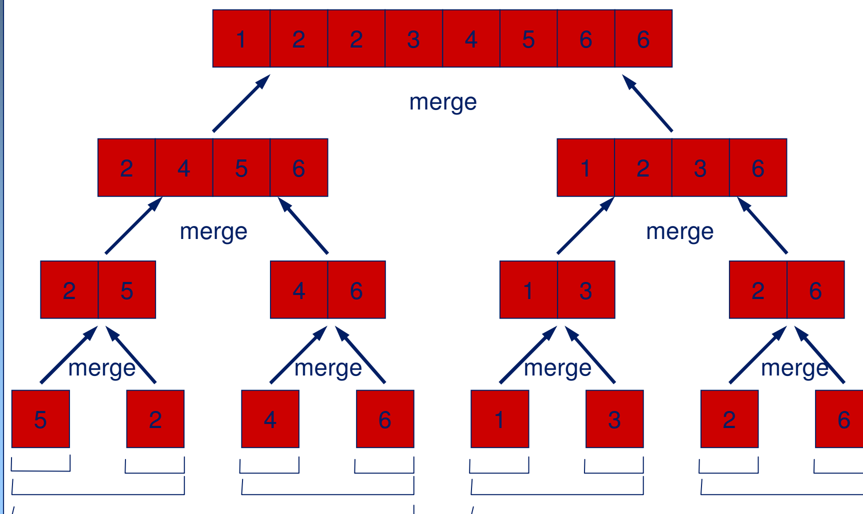
- L'algoritmo MergeSort è un esempio tipico di programma ricorsivo di tipo *divide et impera*.
  - L'array A[1] … A[N] è ordinato spezzando l'array in due parti A[1]…A[m] e A[m+1]…A[N], ordinandoli indipendentemente con la stessa tecnica.
  - Merging dei due risultati intermedi.

AA 2005/2006

MR

18

Algoritmo mergesort



Ordinamento MergeSort

```
void MergeSort(int A[], int n) {
   MergeSortAux(A, 0, n-1);
}

void MergeSortAux(int A[], int l, int r)  {
   if (r <= l) return;
   int m = (r+l)/2;
   MergeSortAux(A, l, m);
   MergeSortAux(A, m+1, r);
   merge(A, l, m, r);
}
```

Ricorsione su sotto-array compreso tra indici l e m.

Ricorsione su sotto-array compreso tra indici m+1 e r.

Inf Gen II

AA 2005/2006

MR

Ordinamento MergeSort

```
void MergeSort(int A[], int n) {
    MergeSortAux(A, 0, n-1);
}

void MergeSortAux (int A[], int l, int r) {
   for(int m = 1; m <= r-l; m = m+m)
      for(int i = l; i <= r-m; i += m + m)
         merge(A, i, i+m-1, min(i+m+m-1, r));
}
```


Inf Gen II

AA 2005/2006

MR

Ordinamento MergeSort: merge

```
void merge(int A[], int l, int m, int r) {
  int i, j;
  int * aux = new int[r+1];

  for(i = m +1; i > l; i--) aux[i-1] = A[i-1];
  for(j = m; j < r; j++)    aux[m+(r-j)] = A[j+1];
  for(int k = l; k <= r; k++) {
    if (aux[j] < aux[i]) {
      A[k] = aux[j--];
    }
    else {
      A[k] = aux[i++];
    }
  }
  delete [] aux;
}
```

Assunzione: l ≤ m ≤ r

Copia degli elementi compresi tra l e m in aux, e elementi tra m e r in altra parte di aux.

Merge dei sotto-array di aux compresi tra l e m e tra m e r in A a partire da l.

Deallocazione di array ausiliario.

Inf Gen II

Caratteristiche algoritmo ordinamento mergesort

- L'algoritmo di ordinamento mergesort effettua circa n log(n) confronti per ordinare un qualunque array di dimensione n.
- Lo spazio ausiliario necessario per ridurre il numero di confronti è proporzionale a n.
- Il limite asintotico superiore è O(n log(n)).

Inf Gen II

Algoritmo quicksort

- È un algoritmo di ordinamento del tipo *divide et impera*.
- Si basa su un processo di partizionamento dell'array in modo che le seguenti tre condizioni siano verificate:
  - Per qualche valore di *i*, l'elemento A[i] si trova al posto giusto.
  - Tutti gli elementi A[1],…,A[i-1] sono minori od uguali ad A[i].
  - Tutti gli elementi A[i+1],…,A[N] sono maggiori od uguali ad A[i].
- L'array è ordinato partizionando ed applicando ricorsivamente il metodo ai sotto array.

Ordinamento quicksort

```
void quicksort(int A[], int N) {
  quicksort_aux(A, 0, N-1);
}

void quicksort_aux(int A[], int l, int r) {
   if  (r <= l) return
   int i = partition(A, l, r);
   quicksort_aux(A, l, i-1);
   quicksort_aux(A, i+1, r);
}
```

Inf Gen II — AA 2005/2006 — MR

Caratteristiche algoritmo ordinamento quicksort

- L'algoritmo di ordinamento quicksort effettua circa n log(n) confronti in media per ordinare un qualunque array di dimensione n.
- Il limite asintotico superiore è O(n log(n)).

Inf Gen II — AA 2005/2006 — MR

Inf Gen II

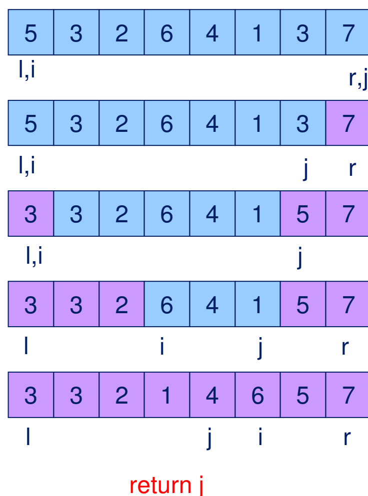
Partizionamento dell'array

- Scegliamo arbitrariamente un elemento (e.g. A[r]), che chiameremo *pivot* (o *elemento di partizionamento)*.
- Scandiamo l'array dall'estremità sinistra fino a quando non troviamo un elemento A[i] <= A[r].
- Scandiamo l'array dall'estremità destra fino a che non troviamo un elemento A[j] >= A[r].
- Scambiamo A[i] e A[j], e iteriamo.
- Procedendo in questo modo si arriva ad una situazione in cui gli elementi a sinistra di *i* sono minori di A[r], mentre quelli a destra di *j* sono maggiori di A[r].

l i j r

Inf Gen II

Partizionamento dell'array



return j

- Partizioniamo a partire da A[1] = 5.
- Gli elementi dell'array precedenti ad A[j] sono minori od uguali a 5.
- Gli elementi dopo A[j] sono maggiori od uguali a 5.

Inf Gen II

AA 2005/2006

MR

Partizionamento dell’array

```
int partition(int A[], int l, int r) {
  int i = l-1, j = r, v = A[r];
  while (true) { // ciclo infinito
    while (A[++i] < v);
    while (v < A[--j]) if (j == l) break;
    if (i >= j) break;
    swap(A[i],A[j]);
  }
  swap(A[i],A[r]);
  return(i);
}
```


Inf Gen II

AA 2005/2006

MR

Analisi delle prestazioni degli algoritmi di sorting

Algoritmo	Limite superiore asintotico
selezione	$O(N^2)$
inserimento	$O(N^2)$
bubblesort	$O(N^2)$
mergesort	O(N log(N))
quicksort	O(N log(N))

Inf Gen II

AA 2005/2006

Algoritmo ShellSort

- La lentezza dell'algoritmo InsertSort risiede nel fatto che le operazioni di scambio avvengono solo tra elementi contigui.
  - Ad esempio se l'elemento più piccolo è in fondo all'array, occorrono N scambi per posizionarlo al posto giusto.
- Per migliorare questo algoritmo è stato pensato l'algoritmo ShellSort.
- L'idea è quella di organizzare l'array in modo che esso soddisfi la proprietà per cui gli elementi aventi tra loro distanza *h* costituiscono una sequenza ordinata, indipendentemente dall'elemento di partenza.
  - Se si applica l'algoritmo con una sequenza di *h* che termina con 1, si ottiene un file ordinato.

MR

31

Inf Gen II

AA 2005/2006

Algoritmo ShellSort

```
void ShellSort(int A[], int l, int r) {
  int h;
  for(h = 1; h <= (r-1)/9; h = 3*h+1);
  for( ; h > 0; h /= 3)
    for(int i = l+h; i <= r; i++) {
      int j = i; int v = A[i];
      while((j >= l + h) && (v < A[j-h])) {
          A[j] = a[j-h];
          j = j - h;
      }
      A[j] = v;
   }
}
```

MR

32

Inf Gen II

Algoritmo ShellSort

- L'algoritmo ShellSort esegue meno di $O(n^{3/2})$ confronti per come lo abbiamo realizzato.
- Il limite superiore asintotico è $O(n^{3/2})$.
- Usando sequenze particolari di *h* si possono ottenere prestazioni diverse (e.g. $O(n (\log n)^2)$).

AA 2005/2006

MR

Inf Gen II

Esercizi

- Esistono altri algoritmi di ordinamento?
- Trovarli e provare a implementarli, confrontandoli con quelli visti a lezione.

AA 2005/2006

MR