Inf Gen II

INFORMATICA GENERALE II

Ingegneria delle Telecomunicazioni
Università di Trento

Marco Roveri
roveri@irst.itc.it

Alberi e Alberi Binari di Ricerca

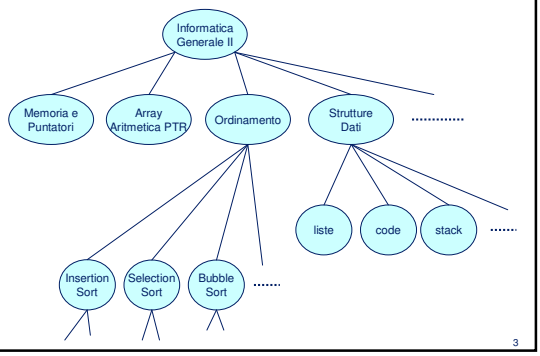
Inf Gen II

Alberi

- Gli alberi sono una struttura matematica che gioca un ruolo molto importante nella progettazione e nell'analisi di algoritmi:
  - Gli alberi sono spesso utilizzati per descrivere proprietà dinamiche degli algoritmi.
  - Spesso utilizziamo strutture dati che rappresentano implementazioni concrete di alberi.
- Questo tipo di ADT lo incontriamo nella vita di tutti i giorni:
  - L'albero genealogico della propria famiglia (da cui deriva la maggior parte della terminologia impiegata nella teoria degli alberi).
  - Nei tornei sportivi.
  - Per rappresentare l'organigramma di aziende.
  - Per rappresentare l'analisi sintattica dei linguaggi di programmazione.
  - Il file system di un sistema operativo.
  - Gerarchie
  - ….

Inf Gen II

Alberi



Inf Gen II

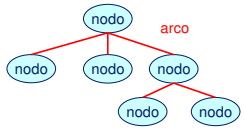
Tipi di Alberi

- Esistono diversi tipi di alberi, ed è importante distinguere tra modello astratto e modello concreto (ovvero tra modello matematico e implementazione).
- In ordine di generalità decrescente distinguiamo:
  - Alberi.
  - Alberi con radice.
  - Alberi ordinati.
  - Alberi M-ari.
  - Alberi binari come caso particolare di albero M-ario.

Inf Gen II

Albero

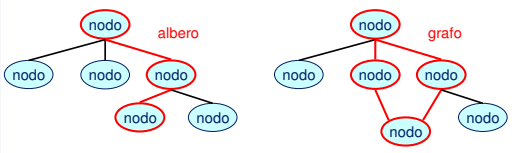
- **Definizione**: Un albero è un insieme non vuoto di *vertici* ed *archi* che soddisfa alcune proprietà:
  - Un *vertice* (o *nodo*) è un oggetto semplice che può essere dotato di un nome, e di una informazione associata (denominata spesso *chiave* o *key*).
  - Un *arco* è una connessione tra due nodi.



Inf Gen II

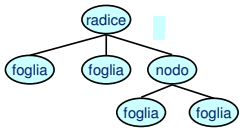
Cammino in un albero

- **Definizione**: un *cammino* nell'albero è una sequenza di vertici distinti, in cui i vertici successivi sono connessi da un arco dell'albero.
- La proprietà che definisce un albero è quella per cui esiste *esattamente* un cammino che connette ogni coppia di nodi.
  - Se tra una coppia di nodi esiste più di un cammino, parliamo di grafi (trattati nella prossima lezione).
- Un insieme di alberi disgiunto si chiama *foresta*.



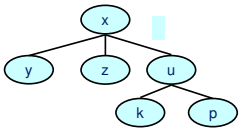
Alberi: definizioni

- Un albero *con radice* è un albero in cui un particolare nodo viene identificato come la *radice* o *root* dell'albero (sono le strutture classicamente utilizzate in informatica).
- In un albero con radice, ogni nodo è la radice di un *sottoalbero* formato dal nodo medesimo e da tutti i nodi ad esso sottostanti.
- Esiste un solo cammino tra la radice e ognuno degli altri nodi dell'albero.



Alberi: definizioni

- Diciamo che un nodo n_1 è *sotto* n_2 (n_2 è *sopra* n_1) se n_2 è nel cammino tra n_1 e la radice.
- Ogni nodo tranne la radice ha un solo nodo sopra di se, detto nodo *padre*.
- I nodi appena sotto un dato nodo sono detti nodi *figli*.
- I nodi senza figli vengono detti *foglie*.



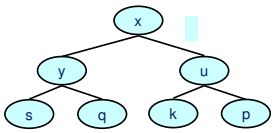
- x è sopra y, z, u
- k e p sono sotto u
- x è padre di y, z, u
- y,z,u sono figli di x
- y, z, k, p sono foglie

Alberi: definizioni

- Un albero è *ordinato* se è un albero con radice e se è specificato l'ordine dei figli di ciascun nodo.
- Se ogni nodo *deve* avere un numero specifico *N* di figli, parliamo di albero *N-ario*.
  - Un caso particolare è l'albero binario, dove N = 2.
- La distinzione tra alberi ordinati ed alberi N-ari riguarda il numero di figli di ciascun nodo:
  - In un albero ordinato i nodi possono avere un numero arbitrario di figli.
  - In un albero N-ario il numero di figli è esattamente N.

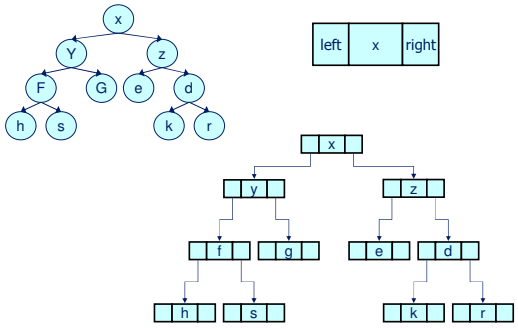
Alberi binari

- Un albero binario è un albero ordinato formato da due tipi di nodi:
  - Nodi terminali foglie.
  - Nodi interni con due figli. Dato che i due figli sono ordinati parleremo di:
    - *Figlio di sinistra*
    - *Figlio di destra*



- y figlio sinistro di x
- u figlio destro di x
- k figlio sinistro di u
- p figlio destro di u

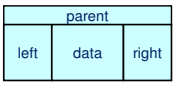
Rappresentazione di alberi binari



Rappresentazione di alberi binari

```
struct Node {
  int data;
  Node * parent;
  Node * left;
  Node * right;
  Node(int d) {
    data = d;
    parent = NULL;
    left = right = NULL;
  }
};
```

Node



Puntatore a parent
sarà utile per realizzare
alcuni algoritmi in modo efficiente

Algoritmi di attraversamento di alberi

- Problema: dato un puntatore ad un nodo di un albero, scandire in modo sistematico ogni nodo dell'albero una ed una sola volta.
- Soluzione:

```
void traverse(Node * h, void visit(Node *)) {
   if (h == NULL) return;
   visit(h);
   traverse(h->left, visit);
   traverse(h->right, visit);
}
```


Algoritmi di attraversamento di alberi

```
void print_node(Node * n) {
  cout << " " n->dato << " ";
}
```

```
....
// stampa su una linea i nodi dell'albero
traverse(tree, print_node);
...
```

```
void sum3_node(Node * n) {
  n->dato += 3;
}
```

```
...
// incrementa di 3 il valore
// memorizzato nel nodo dell'albero
traverse(tree, sum3_node);
...
```

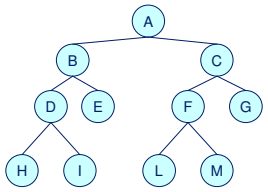
```
void squarecond_node(Node * n) {
  if ((n->dato % 2) != 0)
    n->dato = n->dato * n->dato;
}
```

```
...
// se il valore e' dispari
// eleva il valore al quadrato
traverse(tree, squarecond_node);
...
```


Algoritmi di attraversamento di alberi

- Abbiamo diversi *modi* per attraversare un albero:
  - Pre-ordine (*preorder)*: visitiamo prima il nodo e poi i sottoalberi di sinistra e di destra.
  - In-ordine (*inorder)*: visitiamo prima il sottoalbero di sinistra, poi il nodo, ed infine il sottoalbero di destra.
  - Post-ordine (*postorder)*: visitiamo prima i sottoalberi di sinistra e di destra, poi il nodo.

Algortimi di attraversamento di alberi



- Preorder:
  A B D H I E C F L M G
- Inorder:
  H D I B E A L F M C G
- Postorder:
  H I D E B L M F G C A

Algoritmi ricorsivi di attraversamento di alberi binari

```
void preorder(Node * h, void visit(Node *)) {
   if (h == NULL) return;
   visit(h);
   prorder(h->left, visit);
   preorder(h->right, visit);
}
```


Algoritmi ricorsivi di attraversamento di alberi binari

```
void inorder(Node * h, void visit(Node *)) {
   if (h == NULL) return;
   inorder(h->left, visit);
   visit(h);
   inorder(h->right, visit);
}
```

Algoritmi ricorsivi di attraversamento di alberi binari

```
void postorder(Node * h, void visit(Node *)) {
  if (h == NULL) return;
  postorder(h->left, visit);
  postorder(h->right, visit);
  visit(h);
}
```


Algoritmi non ricorsivi di attraversamento di alberi binari

- Gli algoritmi ricorsivi sono molto "intuitivi" per lavorare su strutture ricorsive.
- Però a volte sono poco efficienti a causa dell'eccessivo uso dello stack che necessitano (variabili locali, punto di ritorno, …).
- Per sopperire a questi problemi, si possono pensare algoritmi iterativi che possono fare un uso esplicito di uno stack (memorizzo solo quello che mi serve).
- Nel seguito vedremo come scrivere una versione iterativa dell'algoritmo "traverse" ricorsivo che abbiamo visto prima.

Algoritmi non ricorsivi di attraversamento di alberi binari

```
void traverse(Node * l, void visit(Node *)) {
  tree_stack ts = new tree_stack();
  tree_push(ts, l);
  while( ! is_empty(ts) ) {
     l = tree_pop(ts);
     visit(l);
     if ( l->left != NULL) tree_push(ts, l->left);
     if ( l->right != NULL) tree_push(ts, l->right);
  }
}
```

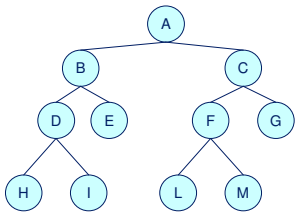

Considerazioni sull'algoritmo "traverse" iterativo

- Lo schema proposto è uno schema concettuale. Gli algoritmi preorder, inorder, postorder iterativi si possono ottenere dallo schema proposto via semplificazioni.
  - Nell'attraversamento preorder non c'è bisogno di effettuare la push sui nodi che visitiamo.
- Esercizio:
  - Provare a scrivere gli algoritmi preorder, postorder, inorder non ricorsivi a partire dallo schema concettuale proposto.
  - Provarli su un albero di prova e verificare che i risultati prodotti dalla versione ricorsiva ed iterativa coincidono.

Ulteriori tecniche di attraversamento di un albero

- Un modo alternativo per visitare un albero consiste nel visitare i nodi secondo l'ordine in cui essi appaiono sulla carta scandendo gli elementi dalla cima al fondo e da sinistra verso destra.
- Questo metodo prende il nome di *level-order*, in quanto i nodi di ciascun livello sono visitati uno dopo l'altro.
- La caratteristica di questo algoritmo consiste nel fatto che *non* corrisponde ad una implementazione legata alla struttura ricorsiva dell'albero.

Attraversamento *level-order*



- Attraversamento *level-order*
  A B C D E F G H I L M

Attraversamento *level-order*

- Domanda: è possibile ottenere l'algoritmo *level-order* dall'algoritmo "traverse" iterativo precedente?
- Risposta:
  - Si sostituendo lo stack con una coda.

Attraversamento *level-order*

```
void level-order(Node * l, void visit(Node *)) {
  tree_queue ts = new tree_queue();
  tree_put(ts, l);
  while( ! is_empty(ts) ) {
     l = tree_get(ts);
     visit(l);
     if ( l->left != NULL) tree_put(ts, l->left);
     if ( l->right != NULL) tree_put(ts, l->right);
  }
}
```


Algoritmi di utilità su alberi

- Molti dei problemi che operano sugli alberi ammettono soluzioni:
  - *ricorsive* che ne sfruttano la struttura ricorsiva.
  - del tipo *divide et impera* che generalizzano gli algoritmi di attraversamento.
    - Analizziamo un albero partendo dalla radice, per poi esaminare (ricorsivamente) i suoi sottoalberi.
    - Possiamo eseguire calcoli, prima dopo o fra le chiamate ricorsive.

Algoritmi di utilità su alberi

- Spesso capita di dover calcolare i valori di alcuni parametri strutturali di un albero, partendo dal nodo radice.
  - Calcolare il numero di nodi dell'albero.
  - Calcolare l'altezza di un albero.
  - Stampare un albero.
  - Disegnare un albero.
- Nel seguito vedremo algoritmi atti a risolvere questi problemi.

Calcolo numero nodi di un albero

- Il problema del calcolo del numero di nodi di un albero è molto semplice:

```
int count( Node * l ) {
   if (l == NULL) return 0;
   return count(l->left) + count(l->right) + 1;
}
```

- Questo semplice algoritmo non dipende dall'ordine delle chiamate ricorsive.
  - Scambiando left con right il risultato non cambia.

Calcolo dell'altezza di un albero

- **Definizione**: Il *livello* di un albero è definito ricorsivamente sulla struttura dell'albero nel modo seguente:
  - la radice ha livello 0;
  - ogni altro nodo ha un livello pari al livello del padre più 1.
- **Definizione**: L'altezza di un albero è pari al massimo tra i livelli di tutti i suoi nodi.

```
int height (Node * l) {
  if (l == NULL) return -1;
  int u = height(l->left); // ordine non importante
  int v = height(l->right);
  if (u > v) return u+1;
  return v + 1;
}
```

Calcolo dell'altezza di un albero

- **Definizione**: Il *livello* di un albero è definito ricorsivamente sulla struttura dell'albero nel modo seguente:
  - la radice ha livello 0;
  - ogni altro nodo ha un livello pari al livello del padre più 1.
- **Definizione**: L'altezza di un albero è pari al massimo tra i livelli di tutti i suoi nodi.

```
int height (Node * l) {
  if (l == NULL) return -1;
  int r = MAX(height(l->left), height(l->right));
  return r+1;
}
```

```
int MAX(int a, int b) {
 if (a > b) return a;
 return b;
}
```


Stampa di un albero

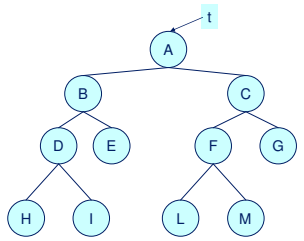
- Una funzione molto utile quando scriviamo programmi che elaborano alberi è quella che *stampa* o *disegna* l'albero.
- L'approccio standard consiste nel tenere traccia dell'altezza di un nodo per stamparlo.

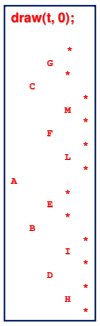
Stampa di un albero

```
void printnode(char x, int h) {
  for( int i = 0; i < h; i++) cout << "   ";
  cout << x << endl;
}

void draw(Node * l, int h) {
  if (l == NULL) { printnode('*', h); return;}
  draw(l->right, h +1);
  printnode(l->data, h);
  draw(l->left, h+1);
}
```


Stampa di un albero

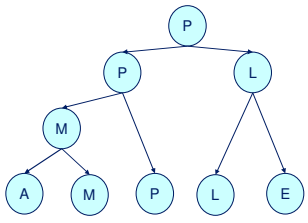




Esempio uso alberi: costruzione di un torneo

- Supponiamo di voler costruire un *torneo*:
  - ovvero un albero binario in cui il contenuto di ogni nodo è una copia del maggiore dei suoi figli. In particolare il nodo alla radice è il *massimo* del torneo.
- I dati sulle foglie sono i dati a disposizione nel problema, mentre il resto dell'albero è una struttura dati che ci consente di determinare il massimo in modo efficiente.
  - I dati di partenza sono memorizzati in un array a[l], …, a[r].
  - Ricorsivamente dividiamo l'array in due parti a[l],…,a[m] e a[m+1],…,a[r] e costruiamo i tornei per queste due parti.
  - Costruiamo il torneo per l'intero array impostando i link di un nuovo nodo in modo che:
    - facciano riferimento ai due tornei calcolati ricorsivamente;
    - copiando poi in tale nodo il maggiore tra i due dati che troviamo nelle radici di questi due tornei.

Esempio uso alberi: costruzione di un torneo



Esempio uso alberi: costruzione di un torneo

```
Node * torneo( int a[], int l, int r) {
  int m = (l + r) / 2;
  if (l == r) return new Node(a[m]);
  Node * left = torneo(a, l, m);
  Node * right = torneo(a, m+1, r);
  int v = MAX(left->data, right->data);
  return new Node(v, left, right);
}
```


lunghezza del cammino di un albero

- **Definizione**: La *lunghezza del cammino* di un albero è la somma dei livelli di tutti i nodi dell'albero.
- Scrivere un programma che sfruttando la definizione di cui sopra calcoli la lunghezza del cammino di un albero:
  - La lunghezza del cammino di un nodo nullo è 0.
  - La lunghezza di un cammino di un nodo di livello *h* è pari a *h* addizionata alla lunghezza del cammino del sottoalbero di sinistra (*ll*) e alla lunghezza del cammino del sottoalbero di destra (*lr*).

$$lp(n,h) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = NULL \\ h + lp(n.left, h+1) + lp(n.right, h+1) & \text{se } n != NULL \end{cases}$$

lunghezza del cammino di un albero

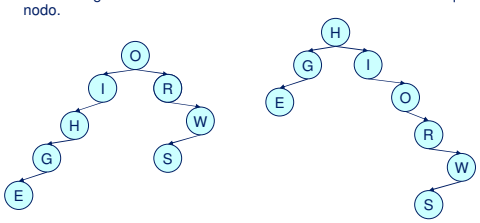
```
int path_length(Node * n) {
   return path_length_recur(n, 0);
}

int path_length_recur(Node * n, int h) {
  if (n == NULL) return 0;
  int ll =  path_length_recur(n->left, h+1);
  int lr = path_length_recur(n->left, h+1);
  return h + ll + lr;
}
```


Alberi binari di ricerca: BST

Alberi binari di ricerca

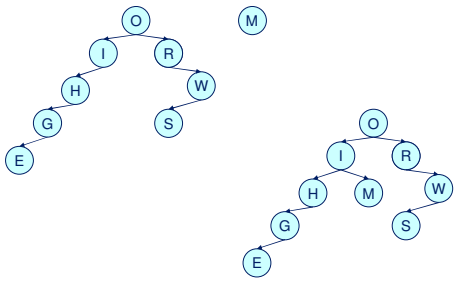
- **Definizione**: Un *albero binario di ricerca* (*binary search tree (BST)*) è un albero binario dove la *chiave* (dato) memorizzata in ciascun nodo è:
  - maggiore o uguale alla chiave di tutti i nodi del sottoalbero sinistro di quel nodo;
  - minore o uguale alle chiavi di tutti i nodi del sottoalbero destro di quel nodo.



Alberi binari di ricerca

- Su un albero binario di ricerca di solito si definiscono alcune operazioni base:
  - *Inserimento* di un nuovo dato nell'albero.
  - *Cancellazione* di un dato dal BST.
  - *Ricerca* di un dato nel BST.
  - *Ordinamento* dei dati del BST.
  - *Ricerca del minimo/massimo* in un BST.
  - *Ricerca del successore/predecessore* in un BST.
  - *Unione* di due BST.
- Nel seguito vedremo queste operazioni nel dettaglio, analizzandone le prestazioni.

Inserimento in un BST



Inserimento in un BST

- Versione ricorsiva secondo la definizione di BST.

```
void insert(Node *& s, char x) {
  // Notare il passaggio per riferimento
  if (s == NULL) { // caso base
    s = new Node(x);
    return;
  }
  if (x < s->data) // caso ricorsivo
    insert(s->left, x);
  else
    insert(s->right, x);
}
```


Inserimento in un BST

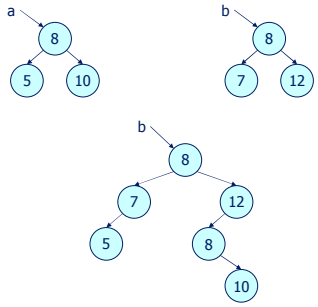
- Versione iterativa

```
void insert(Node * & s, char z) {
  Node v = new Node(z);
  Node * y = NULL;  Node * x = s;
  while(x != NULL) {
    y = x; // memorizzo indirizzo nodo padre
    if (v->data < x->data) x = x->left;
    else x = x->right;
  }
  if (y == NULL)  s = v; // albero vuoto
  else if (v->data < y->data)  y->left = v;
  else y->right = v;
}
```


Unione di due BST

- Altra operazione importante per gli alberi binari è l'unione di due BST.
  - Se uno dei due sottoalberi è vuoto, il risultato dell'unione è l'altro sottoalbero.
  - Altrimenti:
    - Combiniamo i due BST eleggendo (arbitrariamente) la radice del primo BST a radice del nuovo BST;
    - Inseriamo alla radice del secondo BST la radice del primo BST;
    - Combiniamo (ricorsivamente) la coppia dei due sottoalberi di sinistra e di destra.

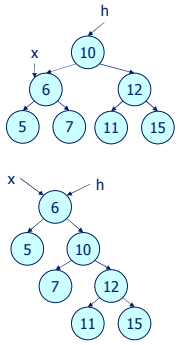
Unione di due BST



Unione di due BST

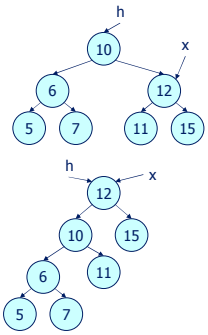
```
Node * join(Node * a, Node * b) {
   if (b == NULL) return a;
   if (a == NULL) return b;
   insert(b, a->data);
   b->left = join(a->left, b->left);
   b->right = join(a->right, b->right);
   delete a;
   return b;
}
```

Rotazione di un nodo in un BST




```
// rotazione a destra
void rotR(Node * & h) {
  Node * x = h->left;
  h->left = x->right;
  x->right = h;
  h = x;
}
```


Rotazione di un nodo in un BST




```
// rotazione a sinistra
void rotL(Node * & h) {
  Node * x = h->right;
  h->right = x->left;
  x->left = h;
  h = x;
}
```


Minimo e Massimo in un BST

- L'elemento in un BST la cui chiave sia minima (massima) può essere determinato seguendo il nodo *left* (*right*, rispettivamente).

```
Node * Tree_Min(Node * t) {
  // we assume t != NULL
  while(t->left != NULL)
    t = t->left;
  return t;
}
```

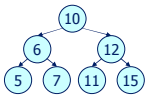
```
Node * Tree_Max(Node * t) {
  // we assume t != NULL
  while(t->right != NULL)
    t = t->right;
  return t;
}
```


Successore di un nodo in un BST

- Spesso è importante determinare il successore nell'ordinamento determinato da una visita inorder dell'albero.
  - Se tutte le chiavi sono distinte, il successore di un nodo X, è il nodo con la più piccola chiave minore della chiave di X.

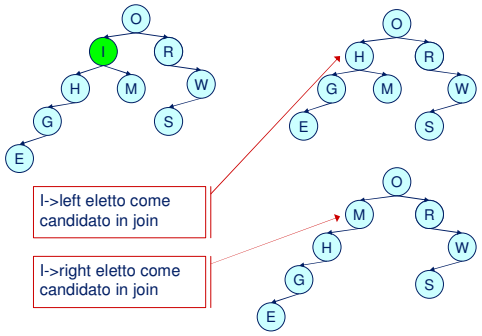
```
Node * Tree_Successor(Node * x) {
 if (x->right != NULL)
   return Tree_Min(x->right);
 Node * y = x->parent;
 while( (y != NULL) && (x == y->righ) ) {
   x = y;
   y = y->parent;
 }
 return y;
}
```

Nota: in questa realizzazione, sfruttiamo il fatto che nel nodo memorizziamo anche il puntatore al padre (i.e., y->parent).




```
Tree_Successor(10) = 11
Tree_Successor(11) = 12
Tree_Successor(7)  = 10
```


Cancellazione in un BST



Cancellazione in un BST

- Versione ricorsiva

```
void remove(Node * & h, char v) {
  if (h == NULL) return;
  char w = h->data;
  if (v < w) remove(h->left, v);
  if (v > w) remove(h->right, v);
  if (v == w) {
    Node * t = h;
    h = join(h->left, h->right);
    delete t;
  }
}
```

Cancellazione in un BST

- La versione ricorsiva vista, prima può essere resa iterativa sfruttando il puntatore al nodo padre.

```
Node * Tree_Delete(Node * &r, Node * z) {
  Node * y;
  if ((z->left == NULL) || (z->right == NULL))   y = z;
  else y = Tree_Successor(z);
  if (y->left != NULL) x = y->left;
  else x = y->right;
  if (x != NULL) x->parent = y->parent;
  if (y->parent  == NULL)
     r = x;
  else if (y == y->parent->left)
     y->parent->left = x;
  else
     y->parent->right = x;
  if (y != z) z->data = y->data;
  return y;
}
```

Nota: A differenza del caso precedente qui passiamo direttamente il nodo che vogliamo eliminare.

Ricerca in un BST

- L'operazione più comune su un BST è la ricerca di una chiave memorizzata nell'albero.
  - La procedura analizza la radice tracciando un percorso nell'albero.
  - Per ogni nodo X dell'albero incontrato, confronta la chiave del nodo X con la chiave cercata.
    - Se le due chiavi sono uguali, abbiamo terminato.
    - Se la chiave è minore della chiave di X, continuo la ricerca sul nodo sinistro.
    - Se la chiave è maggiore della chiave di X, continuo la ricerca sul nodo destro.
    - La complessità asintotica di questo algoritmo è O(h) dove h è l'altezza del BST.

Ricerca in un BST

```
Node * Tree_Search(Node * x, int k) {
  if ((x == NULL) || (x->data == k)) return x;
  if (k < x->data)
     return Tree_Search(x->left, k);
  else
     return Tree_Search(x->right, k);
}
```


Ricerca in un BST

```
Node * Tree_Search(Node * x, int k) {
  while ((x == NULL) || (x->data == k)) {
     if (k < x->data)
        x = x->left;
     else
        x = x->right;
  }
  return x;
}
```


Complessità degli algoritmi analizzati sui BST

- Mediamente le operazioni sui BST sono proporzionali all'altezza dell'albero.
- L'algoritmo di ricerca sull'albero effettua in media *h* confronti nel caso che l'albero sia abbastanza "bilanciato".
- Nel caso in cui l'albero binario degeneri in una lista, si ha il caso peggiore, infatti occorre scorrere tutta la lista per trovare l'elemento.

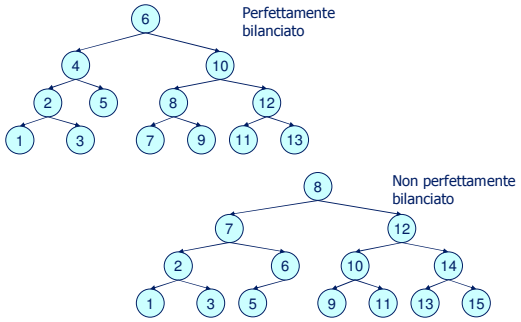
Esercizi

- Che cosa succede se effettuo una visita inorder di un BST?

Alberi binari bilanciati

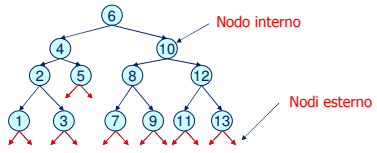
- Gli algoritmi visti operanti su alberi binari si comportano in modo soddisfacente in una stragrande maggioranza di casi, anche se in presenza dei casi peggiori forniscono prestazioni non sempre soddisfacenti.
- Sfortunatamente, il caso peggiore ha buona probabilità di verificarsi nella pratica (file già ordinati in senso inverso, alternanze di chiavi grandi e piccole,…).
- La situazione ideale è quella in cui l'albero BST è perfettamente bilanciato.

Esempio albero BST perfettamente bilanciato



Albero BST bilanciato

- **Definizione**: un nodo di un albero con almeno un figlio è detto *interno*. Altrimenti il nodo è detto *esterno*.



- **Definizione**: un albero binario di ricerca di N nodi è perfettamente bilanciato se ha altezza non maggiore di $\lfloor \log(N) \rfloor$ e esattamente N+1 nodi esterni.

Bilanciamento di un BST

- Una soluzione al problema di migliorare le performance degli algoritmi sugli alberi, consiste nel *bilanciare* l'albero periodicamente.
- Un algoritmo lineare per bilanciare un BST consiste nel partizionare un BST mettendo la mediana alla radice, e ripetendo il procedimento per i sottoalberi.

Bilanciamento di un BST

```
void Balance(Node * & h) {
 Node * min = Tree_Min(h);
 Balance_Recur(h, min);
}
```

```
void Balance_Recur(Node * & h, Node * min) {
  if ((h == NULL) || (h == min)) return;
  partR(h, h->data/2);
  Balance_Recur(h->left);
  Balance_Recur(h->right);
}
```

Assunzione che albero di interi.

```
void partR(Node * & h, int k) {
 int t = (h->left == NULL) ? 0 : h->left->data;
 if (t > k) {
   partR(h->left, k); rotR(h); }
 else {
  partR(h->right); rotL(h); }
}
```


Bilanciamento di un BST

- PartR è una funzione che riorganizza l'albero ponendo il *k*-esimo elemento più piccolo alla radice:
  - Se poniamo (ricorsivamente) il nodo desiderato alla radice di uno dei due sottoalberi, allora si può renderlo radice dell'intero albero tramite una singola rotazione.