
INFORMATICA GENERALE II

Ingegneria delle Telecomunicazioni
Università di Trento

Marco Roveri

roveri@irst.itc.it

Grafi

Parte del materiale qui presentato è presentata per gentile concessione di M. Benerecetti

Cosa è un *grafo*

■ Esempio:

Studenti

Corsi

Marco

ASD, ARCH

Carla

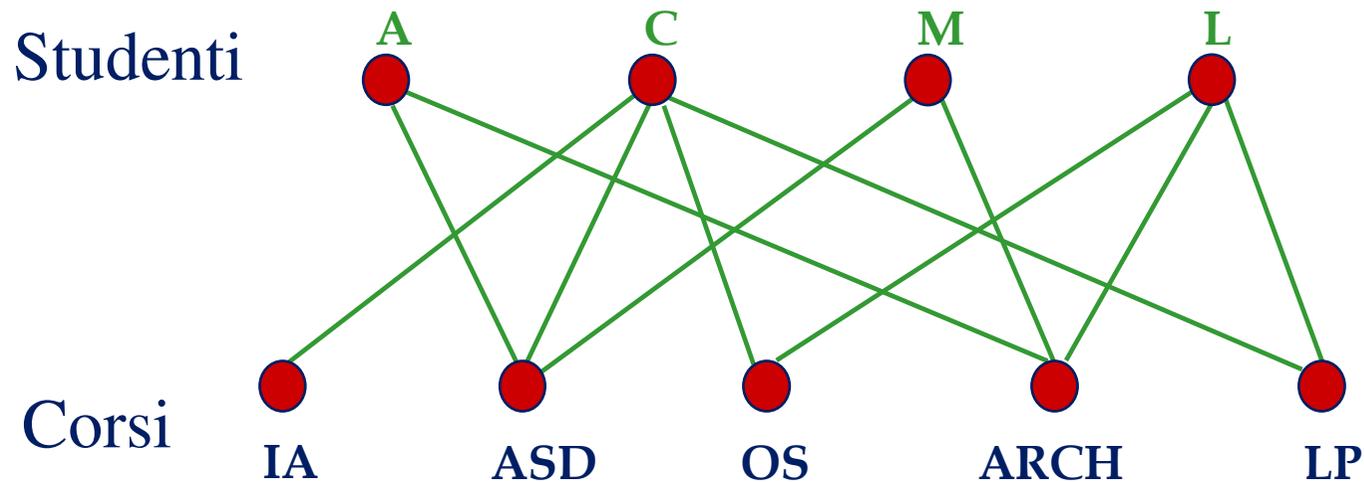
IA, ASD, OS, LP

Andrea

ASD, ARCH

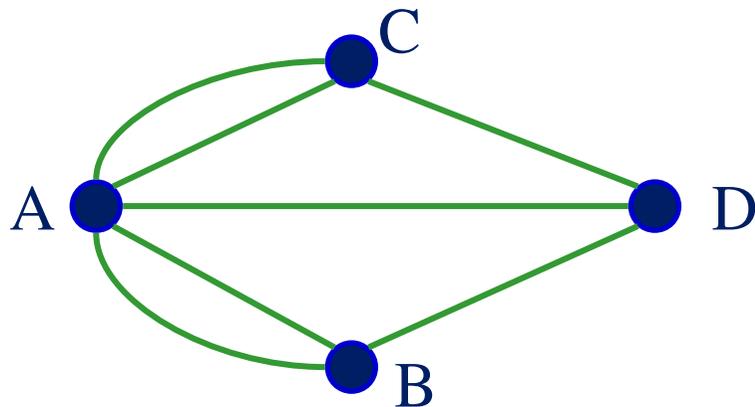
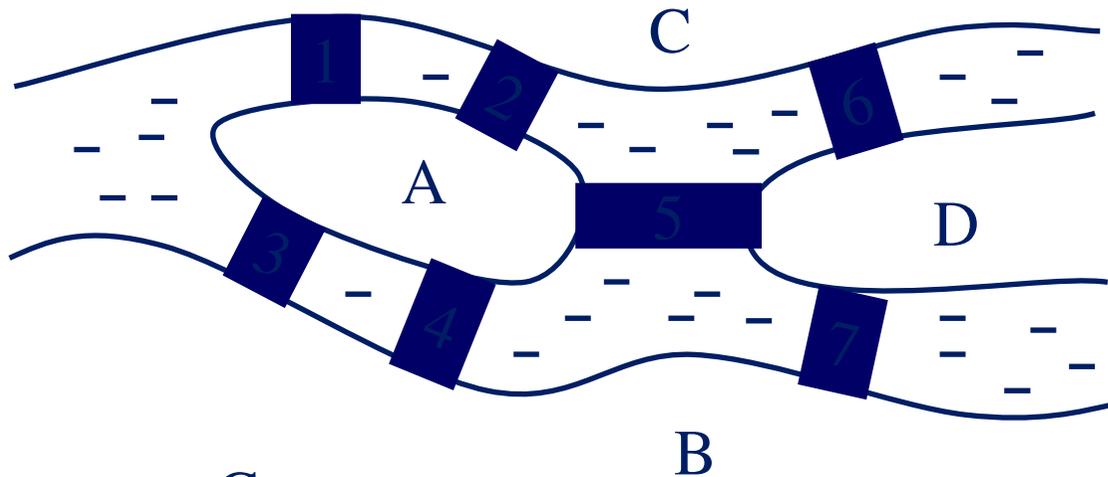
Laura

OS, ARCH, LP



Rappresentazioni a grafi di problemi

■ Ponti di Königsburg

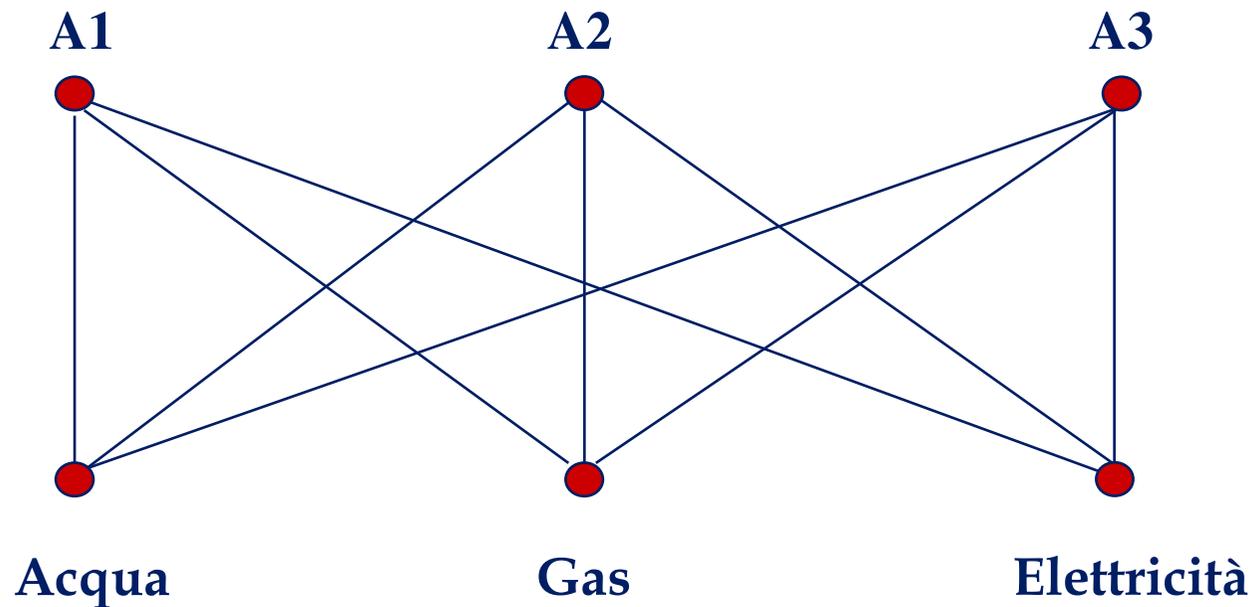


■ **Problema:** è possibile attraversare tutti i ponti esattamente una sola volta?

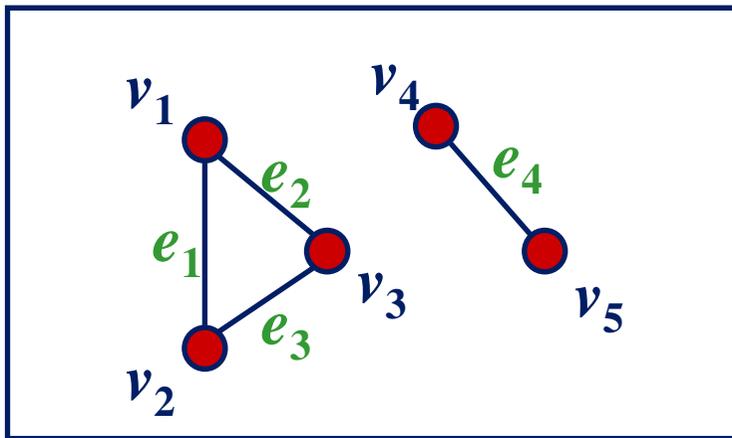
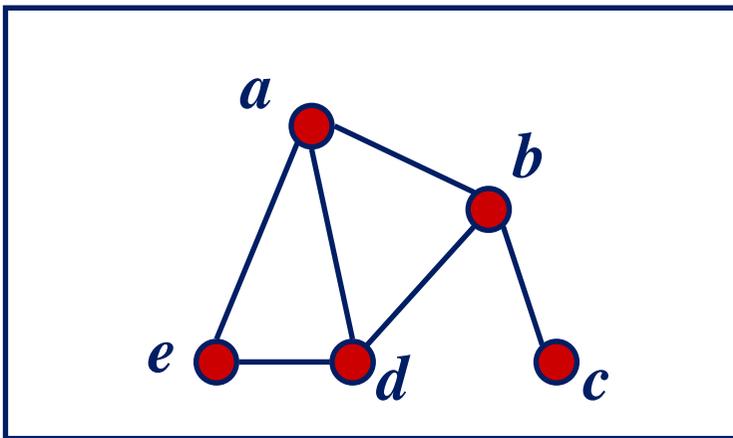
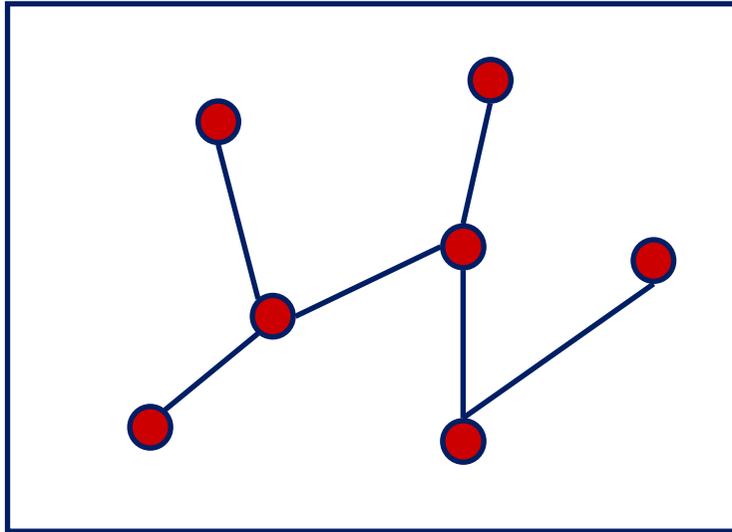
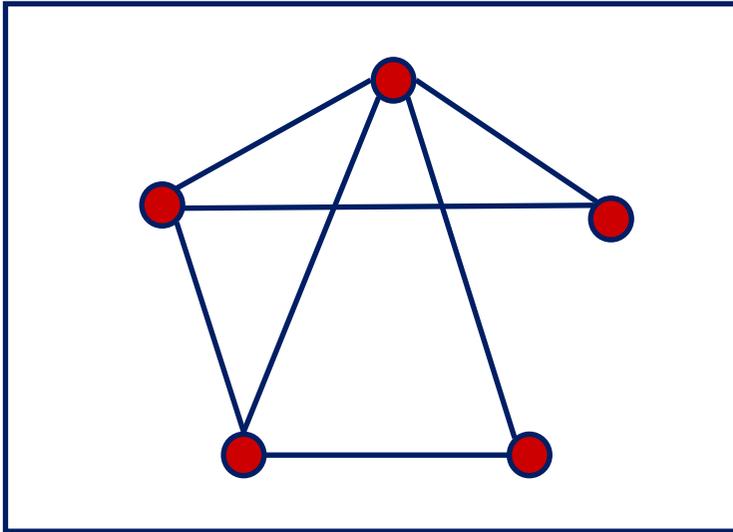
Rappresentazioni a grafi di problemi

■ Problema:

- Dobbiamo connettere tre abitazioni A1, A2, A3 tramite tubature per fornire ad ognuna Acqua, Gas ed Elettricità.
- Le tubature devono essere posizionate tutte alla stessa profondità.
- È possibile offrire la fornitura alle tre abitazioni senza fare incrociare le tubature?

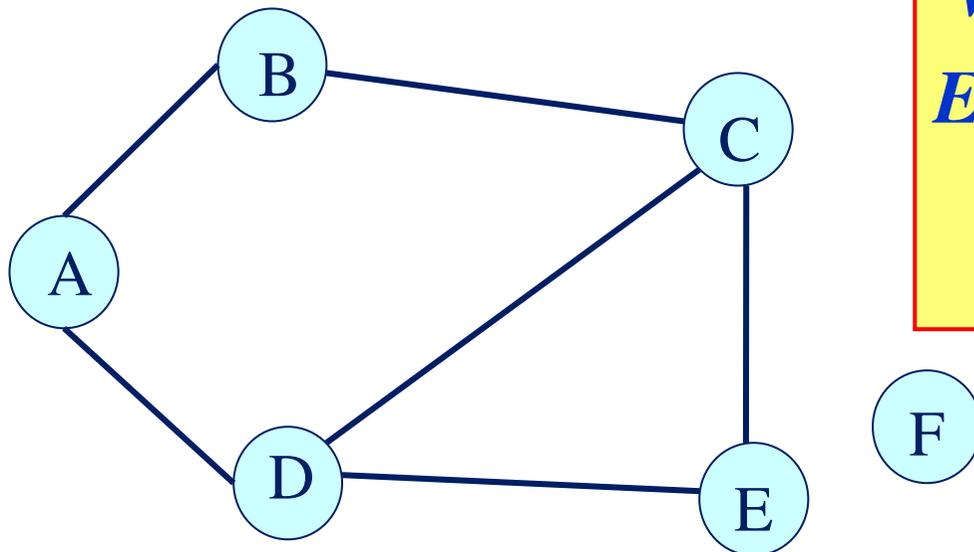


Esempi di grafi



Definizione di grafo

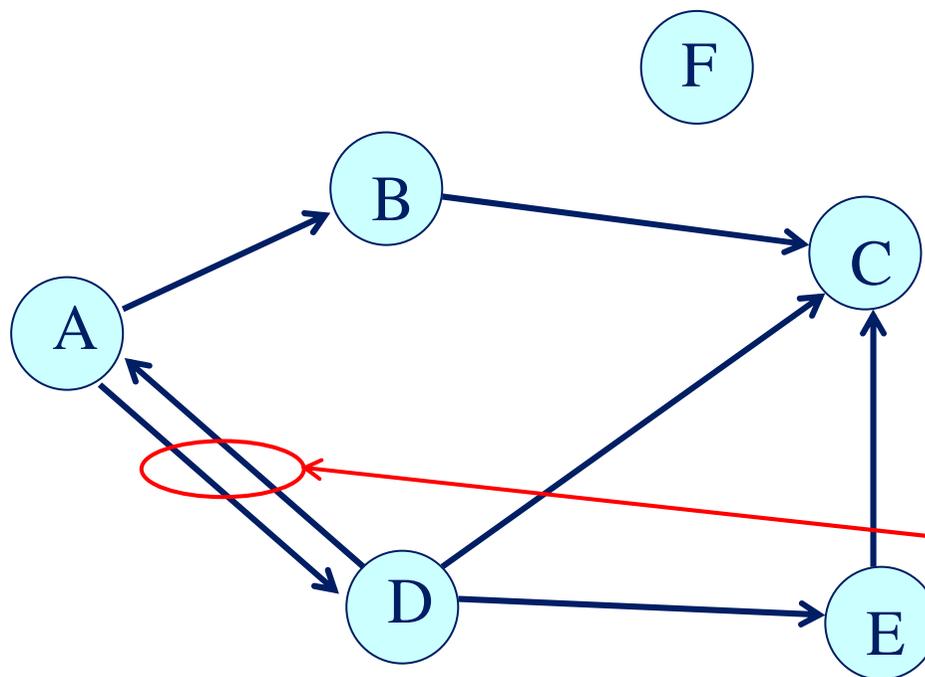
- Un **grafo** G è una coppia di elementi (V, E) dove:
 - V è un insieme detto **insieme dei vertici**
 - E è un insieme detto **insieme degli archi (edge)**,
 - $(v,w) \in E$ se e solo se $v \in V$ e $w \in V$.



$$V = \{A, B, C, D, E, F\}$$
$$E = \{(A,B), (A,D), (B,C), (C,D), (C,E), (D,E)\}$$

Grafi orientati

- Un **grafo orientato** G è una coppia di elementi (V, E) dove:
 - E è una **relazione binaria** tra vertici detta **insieme degli archi**.

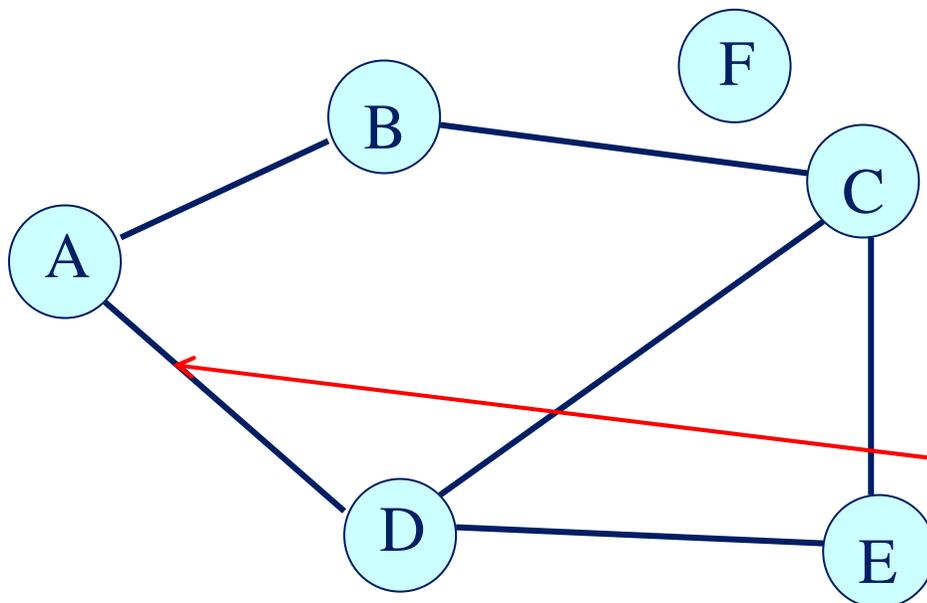


$V = \{A, B, C, D, E, F\}$
 $E = \{(A,B), (A,D), (B,C), (D,C), (E,C), (D,E), (D,A)\}$

(A,D) e (D,A) denotano due archi diversi

Grafi non orientati

- Un *grafo non orientato* G è una coppia di elementi (V, E) dove:
 - E è un *insieme non ordinato* di coppie di vertici detta *insieme degli archi*.



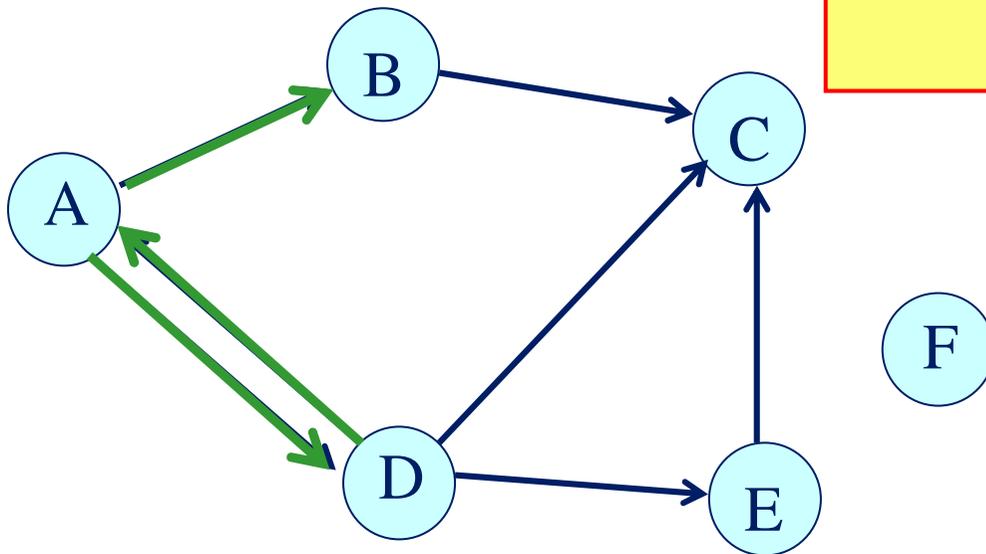
$V = \{A, B, C, D, E, F\}$
 $E = \{(A,B), (A,D),$
 $(B,C), (C,D),$
 $(C,E), (D,E)\}$

(A,D) e (D,A) denotano lo stesso arco

Definizioni sui grafi

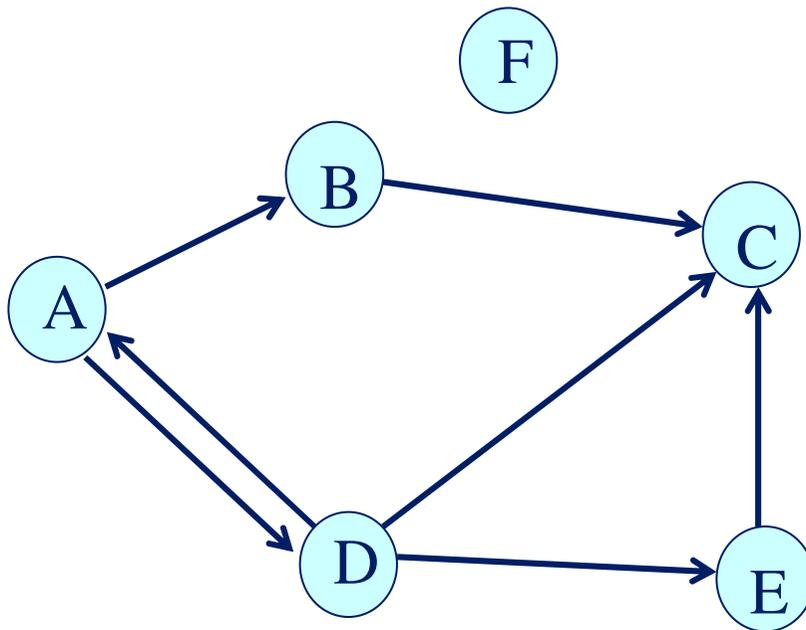
- In un grafo orientato, un arco (w,v) si dice *incidente* da w in v

- (A,B) è *incidente* da A a B
- (A,D) è *incidente* da A a D
- (D,A) è *incidente* da D a A



Definizioni sui grafi

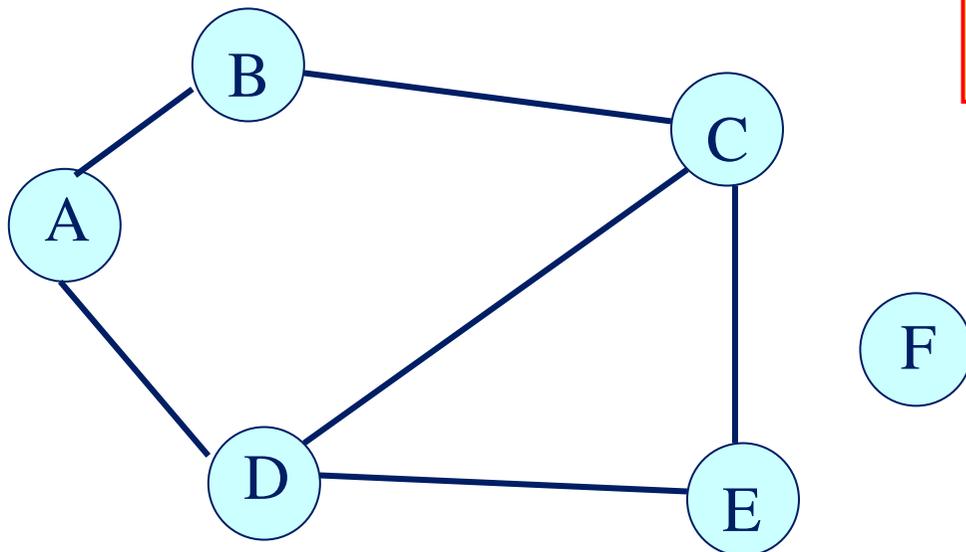
- Un vertice w si dice **adiacente** a v se e solo se $(v, w) \in E$.
- In un grafo non orientato la relazione di adiacenza tra vertici è simmetrica.



- *B è adiacente ad A*
- *C è adiacente a B e a D*
- *A è adiacente a D e vice versa*
- *B NON è adiacente a D NÉ a C*
- *F NON è adiacente ad alcun vertice*

Definizioni sui grafi

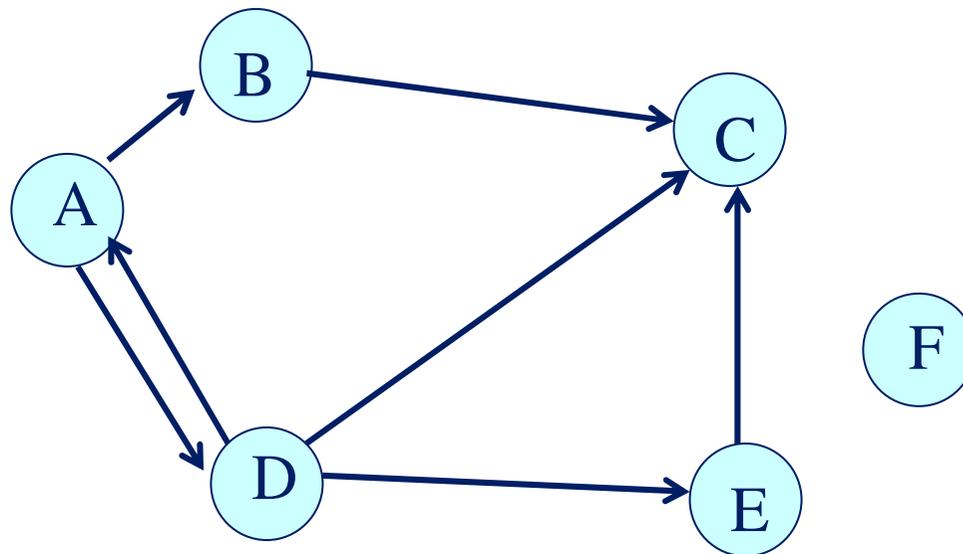
- In un grafo non orientato il *grado di un vertice* è il numero di archi che da esso si dipartono



- *A*, *B* ed *E* hanno *grado 2*
- *C* e *D* hanno *grado 3*
- *F* ha *grado 0*

Definizioni sui grafi

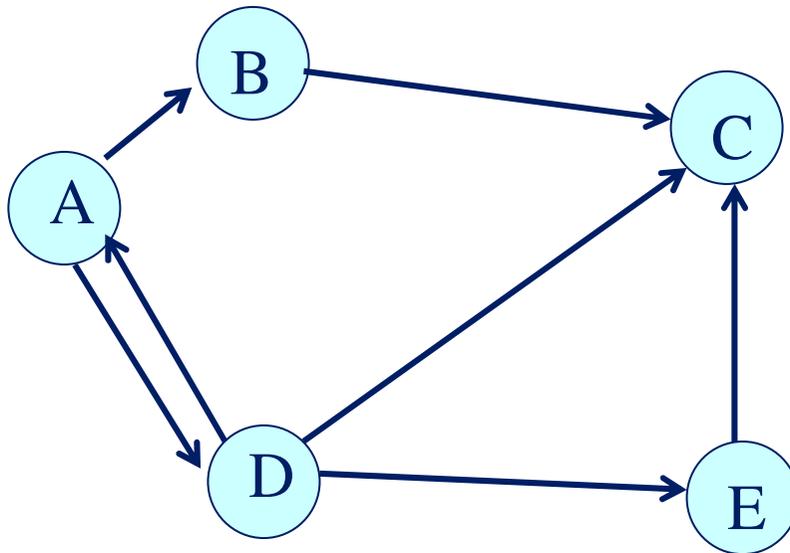
- In un grafo orientato il *grado entrante* (*uscente*) di un vertice è il numero di archi incidenti in (da) esso



- *A* ha *grado uscente* 2 e *grado entrante* 1
- *B* ha *grado uscente* 1 e *grado entrante* 1
- *C* ha *grado uscente* 0 e *grado entrante* 3
- *D* ha *grado uscente* 3 e *grado entrante* 1

Definizioni sui grafi

- In un grafo orientato il *grado* di un vertice è la somma del suo grado entrante e del suo grado uscente



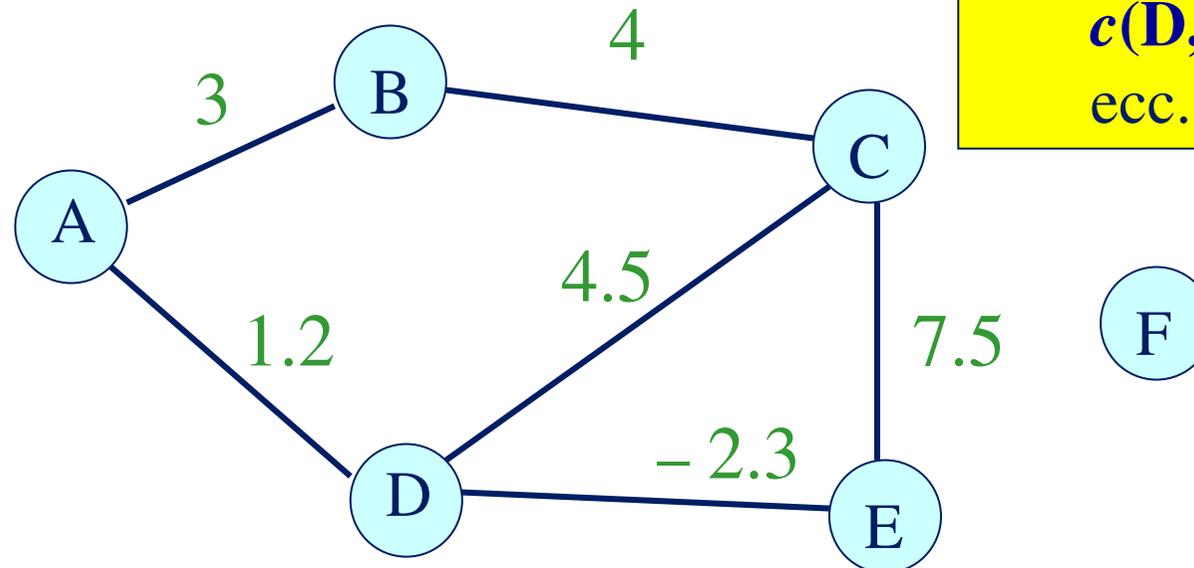
- *A* e *C* hanno *grado 3*
- *B* ha *grado 2*
- *D* ha *grado 4*



Definizioni sui grafi

In alcuni casi ogni arco ha un *peso* (o *costo*) associato.

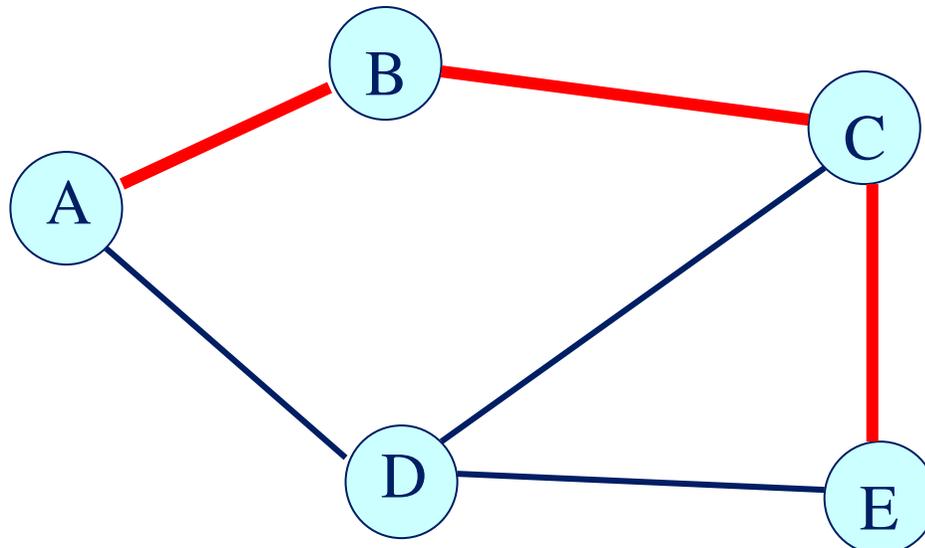
Il costo può essere determinato tramite una funzione di costo, $c: E \rightarrow R$, dove R è l'insieme dei numeri reali (o interi).



Es., $c(A, B) = 3$,
 $c(D, E) = -2.3$,
ecc.

Definizioni sui grafi

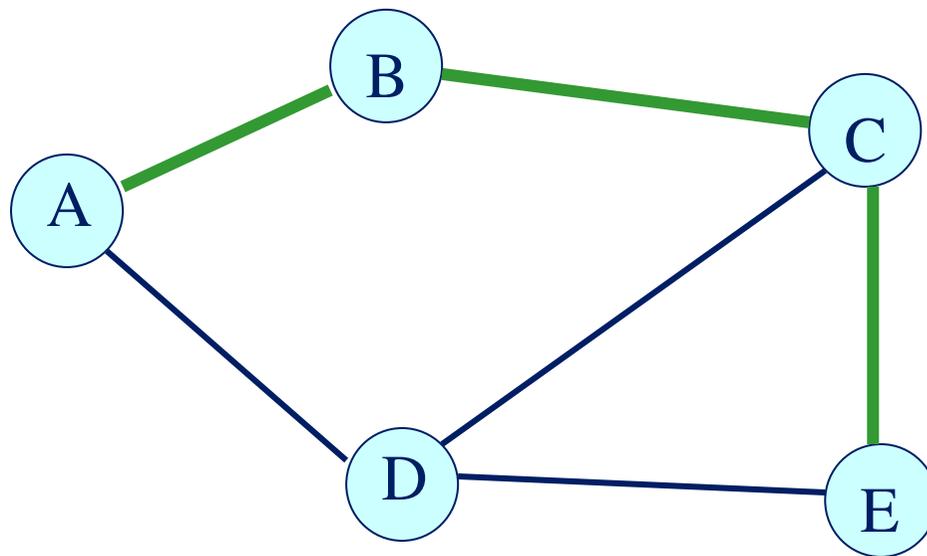
- Sia $G = (V, E)$ un grafo.
- Un *percorso* nel grafo è una sequenza di vertici $\langle w_1, w_2, \dots, w_n \rangle$ tale che $(w_i, w_{i+1}) \in E$ per $1 \leq i \leq n-1$.



Es.,
 $\langle A, B, C, E \rangle$
è un percorso nel grafo

Definizioni sui grafi

- Un percorso si dice *semplice* se tutti i suoi vertici sono distinti (compaiono una sola volta nella sequenza), eccetto al più il primo e l'ultimo che possono essere lo stesso.

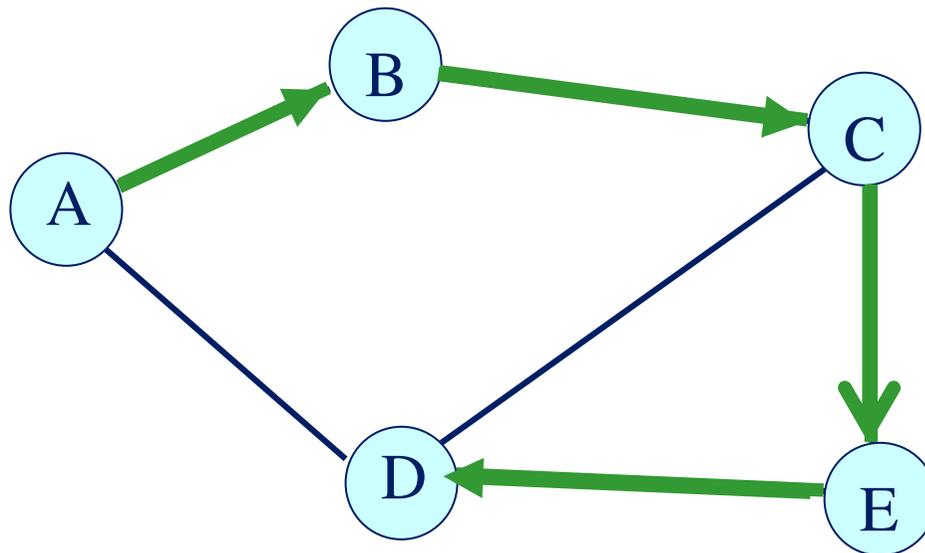


- il percorso $\langle A, B, C, E \rangle$ è semplice.
- così come anche $\langle A, B, C, E, D, A \rangle$.
- il percorso $\langle A, B, C, E, D, C \rangle$ non è semplice, poiché C è ripetuto.

Definizioni sui grafi

- Se esiste un percorso p tra i vertici v e w , si dice che w è **raggiungibile** da v tramite p .

- A è raggiungibile da D e vice versa
- A è raggiungibile da D

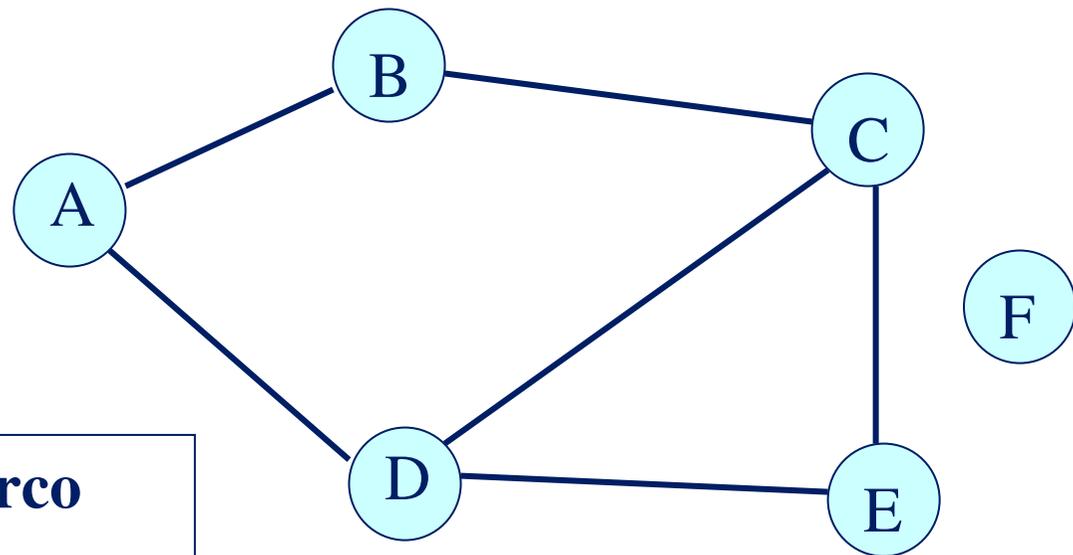


Definizioni sui grafi

- Se G è un grafo non orientato, diciamo che G è *connesso* se esiste un *percorso* da *ogni vertice* ad *ogni altro vertice*.

Un grafo non orientato *non connesso* si dice *sconnesso*.

Questo grafo non orientato *non è connesso*.

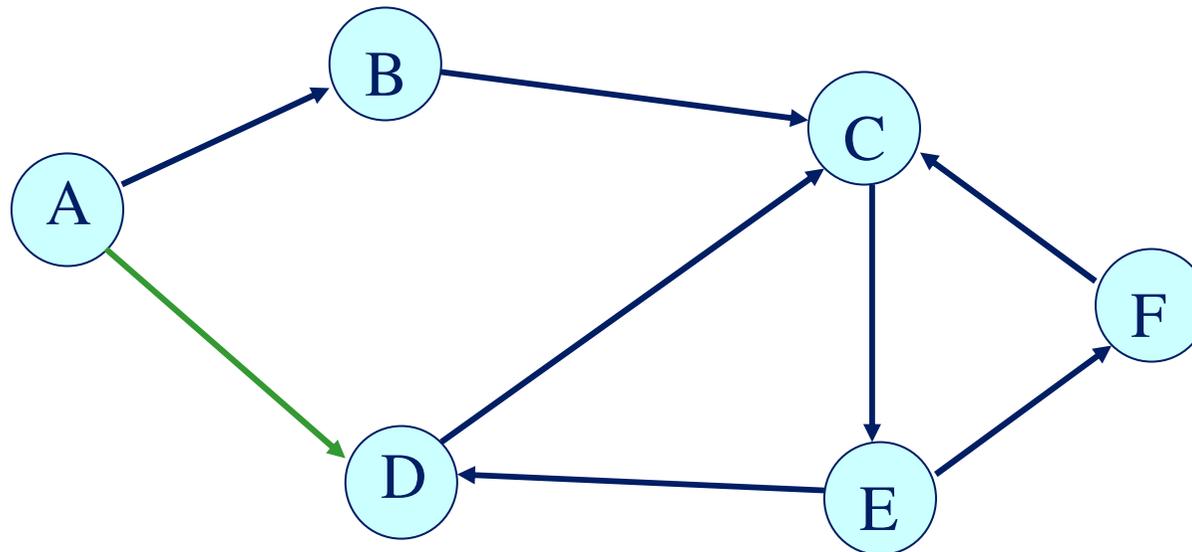


Se aggiungiamo un arco (E,F) allora il grafo è *connesso*.

Definizioni sui grafi

- Se G è un grafo orientato, diciamo che G è *fortemente connesso* se esiste un percorso da ogni vertice ad ogni altro vertice.

Questo grafo orientato **non è fortemente connesso**; ad es., *non esiste percorso da D a A.*



Definizioni sui grafi

- Un **ciclo** in un grafo è un percorso $\langle w_1, w_2, \dots, w_n \rangle$ di lunghezza almeno 1, tale che $w_1 = w_n$.
- Un grafo senza cicli è detto **aciclico**.
- Un grafo **completo** è un grafo che ha un arco tra ogni coppia di vertici.

Rappresentazione di grafi

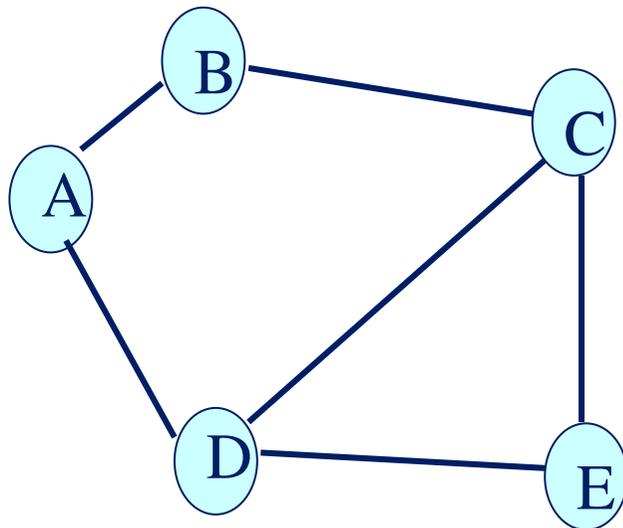
- Per la rappresentazione di grafi vengono comunemente utilizzate due tipologie distinte:
 - Rappresentazione mediante *matrice delle adiacenze*.
 - Rappresentazione mediante *liste di adiacenze*.

Rappresentazione di grafi

Rappresentazione con *matrice di adiacenza*:

$$M(v, w) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v, w) \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Spazio: $|V|^2$



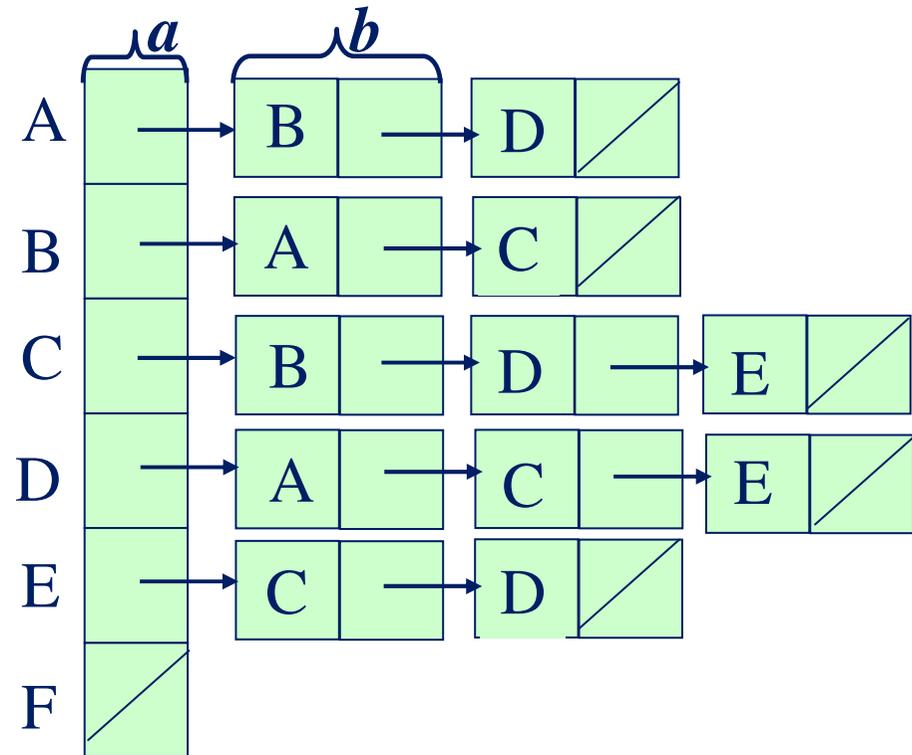
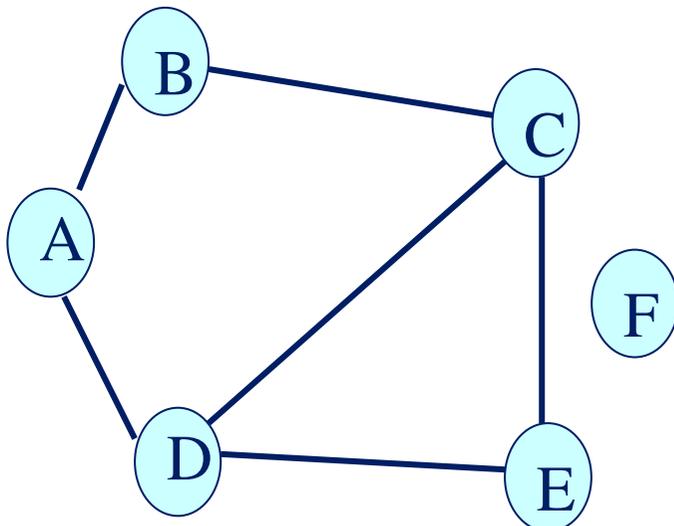
	A	B	C	D	E	F
A	0	1	0	1	0	0
B	1	0	1	0	0	0
C	0	1	0	1	1	0
D	1	0	1	0	1	0
E	0	0	1	1	0	0
F	0	0	0	0	0	0

Rappresentazione di grafi

Rappresentazione con *liste di adiacenza*:

$L(v)$ = lista di w , tale che
 $(v, w) \in E$, per $v \in V$

Spazio: $a |V| + 2 b |E|$



Rappresentazione di grafi

■ Matrice di adiacenza

- Spazio richiesto $O(|V|^2)$.
- Verificare se i vertici u e v sono adiacenti richiede tempo $O(1)$.
- Molti 0 nel caso di *grafi sparsi*.

■ Liste di adiacenza

- Spazio richiesto $O(|E|+|V|)$.
- Verificare se i vertici u e v sono adiacenti richiede tempo $O(|V|)$.

Implementazione di grafi

- Mediante matrice di adiacenze.

```
struct Grafo {
    int V; // numero vertici
    int **adj;
    Grafo(int n) {
        V = n;
        adj = new int * [V];
        for(int i = 0; i < V; i++) {
            adj[i] = new int [V];
            // Inizializzazione grafo con tutti vertici isolati
            for(int j = 0; j < V; j++) adj[i][j] = 0;
        }
    }
};
```

Implementazione di grafi

```
// ritorna numero vertici del grafo
int getnumvertex(Grafo * g) {
    return g->V;
}

void addedge(Grafo * g, int i, int j) {
    g->adj[i][j] = 1;
    // se il grafo non e' orientato
    // g->adj[j][i] = 1;
}

void deledge(Grafo * g, int i, int j) {
    g->adj[i][j] = 0;
    // se il grafo non e' orientato
    // g->adj[j][i] = 0;
}
```

```
bool connected(Grafo * g, int i, int j) {
    return (g->adj[i][j] == 1);
}

void printadj(Grafo * g) {
    int V = getnumvertex(g);
    for(int i = 0; i < V; i++) {
        for(int j = 0; j < V; j++)
            if (connected(g, i, j) == true)
                cout << " 1 ";
            else
                cout << " 0 ";
        cout << endl;
    }
}
```

Nota: mancano controlli che i e j siano minori stretti di V

Implementazione di grafi

```
struct Node {
    int name;
    node * next;
    Node(int nm, Node * ne) {
        name = nm;
        next = ne;
    };
};

Node * node_empty() {
    return NULL;
}

bool node_isempty(Node * n) {
    return n == NULL;
}

int node_getname(Node * n) {
    return n->name;
}
```

```
Node * node_getnext(Node * n) {
    return n->next;
}

void node_setnext(Node * n, Node * n1) {
    n->next = n1;
}

Node * node_remove(Node * & n, int j) {
    if (node_isempty(n)) return n;
    if (node_getname(n) == j) {
        Node * d = n;
        n = node_getnext(n);
        delete d;
    }
    else {
        node_setnext(n, node_remove(node_getnext(n), j));
    }
    return n;
}
```

Implementazione di grafi

```
struct Grafo {
    int V; // numero vertici
    node ** adj;
    Grafo(int n) {
        V = n;
        adj = new node * [V];
        for(int i = 0; i < V; i++) {
            adj[i] = node_empty();
        }
    };
};

int getnumvertex(Grafo * g) {
    return g->V;
}
```

```
void addedge(Grafo * g, int i, int j) {
    Node * n0 = new Node(j, g->adj[i]);
    g->adj[i] = n0;
    // Se il grafo non e' orientato
    // Node * n1 = new Node(i, g->adj[j]);
    // g->adj[j] = n1;
}

void deledge(Grafo * g, int i, int j) {
    g->adj[i] = node_remove(g->adj[i], j);
    // Se il grafo non e' orientato
    // g->adj[j] = node_remove(g->adj[j], i);
}
```

Nota: mancano controlli che i e j siano minori strettamente di V

Implementazione di grafi

```
bool connected(Grafo * g, int i, int j) {
    bool found = false;
    for(Node * adj = g->adj[i];
        !node_isempty(adj) && !found;
        adj = node_getnext(adj)) {
        if (node_getname(adj) == j) found = true;
    }
    return found;
}

void printadj(Grafo * g) {
    int V = getnumvertex(g);
    for(int i = 0; i < V; i++) {
        for(int j = 0; j < V; j++)
            if (connected(g, i, j) == true) cout << " 1 ";
            else cout << " 0 ";
        cout << endl;
    }
}
```

Nota: mancano controlli che i e j siano minori strettamente di V

Visita/Attraversamento di grafi

- Gli algoritmi di visita o attraversamento di grafi sono una generalizzazione degli algoritmi di attraversamento degli alberi.
- Esistono diverse tecniche di attraversamento.
- L'algoritmo forse più importante è l'algoritmo di attraversamento in *profondità*, meglio noto con il nome di *depth-first search algorithm (DFS)*.
- L'algoritmo DFS costruisce la base di partenza per molti algoritmi fondamentali di elaborazione di grafi.

Algoritmo DFS

- È una variazione della visita in preordine di un albero binario.
- Si parte da un vertice s :
 - Si processa il vertice s ;
 - Ricorsivamente si processano tutti i nodi adiacenti ad s .
- Bisogna evitare di visitare vertici già visitati:
 - Ovvero bisogna evitare i cicli.
 - Questo lo si ottiene *marcando* (*colorando*) il grafo.

Algoritmo DFS: intuizioni

I passi dell'algoritmo DFS

1. Si sceglie un vertice non visitato s
2. Si sceglie un nodo non visitato adiacente ad s
3. Da s si attraversa quindi un percorso di vertici adiacenti (visitandoli) finché possibile:
 - Cioè fintanto che non si incontra un nodo già visitato
4. Appena si resta "bloccati" (tutti gli archi da un vertice sono stati visitati), si torna indietro (*backtracking*) di un passo (vertice) nel percorso visitato (aggiornando il vertice s al vertice corrente).
5. Goto 2.

Algoritmo DFS: implementazione

```
void DFS(Grafo * g, int s, void visit(Grafo *, int)) {  
    // alloco un array di boolean per tenere traccia se  
    // ho gia' visitato il vertice  
    bool * visited = new bool [getnumvertex(g)];  
  
    // inizializzazione dell'array visited  
    for(int i = 0; i < getnumvertex(g); i++) visited[i] = false;  
  
    // chiamata alla routine ricorsiva  
    DFS_Recur(g, s, visit, visited);  
  
    // deallocazione array visited  
    delete [] visited;  
}
```

Algoritmo DFS: implementazione

```
void DFS_Recur(Grafo * g, int s, void visit(Grafo *, int),
               bool visited[]) {
    // invoco della procedura che processa il vertice s
    visit(g, s);
    // tengo traccia del fatto che ho visitato il nodo s;
    visited[s] = true;

    // ricorsione sui nodi adiacenti ad s
    for(int i = 0; i < getnumvertex(g); i++) {
        if ((connected(g, s, i) && ! visited[i])
            DFS_Recur(g, i, visit, visited);
    }
```

Implementazione generica **non** sfrutta implementazione del dato astratto grafo (i.e. che usa o meno liste di adiacenza o matrice di adiacenza).

Algoritmo DFS: implementazione

```
void DFS(Grafo *g, int s, void visit(Grafo *, int)) {
    bool * visited = new bool [getnumvertex(g)];
    for(int i = 0; i < getnumvertex(g); i++) visited[i] = false;

    // utilizziamo uno stack inizializzato vuoto
    Stack st = new Stack();
    push(st, s);
    while(!stack_isempty(st)) { // iteriamo fintanto che non svuotiamo lo stack
        s = pop(st);
        if (!visited[s]) {
            visit(g, s); visited[s] = true;
            // aggiungiamo nodi successori allo stack
            for(int j = 0; j < getnumvertex(g); j++)
                if (connected(g, s, j) && !visited[j])
                    push(st, j);
        }
        delete [] visited;
        delete st;
    }
}
```

// Implementare questo algoritmo

Caratteristiche DFS

- L'algoritmo DFS richiede un tempo proporzionale a $|V| + |E|$ in un grafo $G=(V,E)$, quindi ha limite superiore asintotico $O(|V|+|E|)$.

Algoritmo BFS

- È un algoritmo alternativo all'algoritmo di ricerca in profondità.
- È anche detto algoritmo di vista in ampiezza.
- Dato un vertice s
 - Visito s
 - Visito i vertici a distanza 1 da s
 - Proseguo visitando i vertici a distanza 2 da s (ovvero a distanza 1 da quelli a distanza 2 da s).
- Si basa sull'algoritmo di attraversamento di alberi binari *level-order*.
- Similmente al caso dell'attraversamento level-order per alberi binari, l'algoritmo BFS si ottiene dall'algoritmo DFS iterativo usando una "Coda" invece che uno "Stack".

Algoritmo BFS: implementazione

```
void BFS(Grafo *g, int s, void visit(Grafo *, int)) {
    bool * visited = new bool [getnumvertex(g)];
    for(int i = 0; i < getnumvertex(g); i++) visited[i] = false;

    // utilizziamo uno stack inizializzato vuoto
    Queue q = new Queue();
    put(q, s);
    while(!queue_isempty(q)) { // iteriamo fintanto che non svuotiamo la coda
        s = get(q);
        if (!visited[s]) {
            visit(g, s); visited[s] = true;
            // aggiungiamo nodi successori alla coda
            for(int j = 0; j < getnumvertex(g); j++)
                if (connected(g, s, j) && !visited[j])
                    put(q, j);
        }
        delete [] visited;
        delete q;
    }
}
```

Algoritmo BFS: caratteristiche

- L'algoritmo di visita in breadth-first impiega tempo proporzionale alla somma del numero di vertici e del numero di archi (dimensione delle liste di adiacenza).
- Il limite superiore asintotico è $O(|E| + |V|)$.

Raggiungibilità di un vertice

- Due nodi s e t sono connessi se e solo se esiste un percorso tra s e t .
- Si vuole sviluppare un algoritmo che ritorni true se esiste un percorso tra s e t , false altrimenti.
- Osservazione:
 - il nodo finale è raggiungibile dal nodo iniziale se e solo se un algoritmo di visita che parte dal nodo iniziale riesce a visitare il nodo finale.
- Il modo più semplice per realizzarlo consiste nel modificare uno degli algoritmi di visita analizzati.
 - Alla fine della visita basta chiedersi se il nodo finale è marcato visited.

Raggiungibilità: implementazione

```
bool are_connected(Grafo *g, int s, int d) {
    bool * visited = new bool [getnumvertex(g)];
    for(int i = 0; i < getnumvertex(g); i++) visited[i] = false;

    // utilizziamo uno stack inizializzato vuoto
    Queue q = new Queue();
    put(q, s);
    while(!queue_isempty(q)) { // iteriamo fintanto che non svuotiamo la coda
        s = get(q);
        if (!visited[s]) {
            visited[s] = true;
            for(int j = 0; j < getnumvertex(g); j++)
                if (connected(g, s, j) && !visited[j]) put(q, j);
        }
    }
    bool result = visited[d];
    delete [] visited; delete q;
    return result;
}
```

Percorso a distanza minima

- Problema: calcolare percorso a distanza minima tra due vertici s e d .
- Intuizione: sfruttiamo algoritmo BFS per costruire tale percorso.
 - Usiamo un array $u[]$ tale che $u[i]$ mi dice chi è il vertice predecessore del vertice i .
 - Per ogni vertice v adiacente al vertice s in esame, memorizziamo in $u[v]$ il predecessore di v , ovvero s .
 - Alla fine della visita, un attraversamento dei nodi di u partendo dal nodo d ci dà il percorso minimo tra s e d .

Percorso a distanza minima

```
void print_minimumpath(Grafo *g, int s, int d, void visit(Grafo *, int)) {
    bool * visited = new bool [getnumvertex(g)];
    int * U = new int [getnumvertex(g)];
    for(int i = 0; i < getnumvertex(g); i++) {
        visited[i] = false; U[i] = -1;
    }
    Queue q = new Queue(); put(q, s);
    while(!queue_isempty(q)) {
        int s = get(q);
        if (!visited[s]) {
            visited[s] = true;
            for(int j = 0; j < getnumvertex(g); j++)
                if (connected(g, s, j) && !visited[j]) {
                    put(q, j); U[j] = s;
                }
        }
    }
    delete [] visited; delete q;
    print_path(g, s, d, U, visit);
    delete [] U;
}
```

Percorso a distanza minima

```
void print_path(Grafo g, int s, int d, int [] U, void visit(Grafo g, int)) {  
    if (s == d) visit(g, s);  
    else if (U[d] == -1) {  
        cout << "There is no path among " << s << " and " << d << endl;  
    }  
    else {  
        print_path(g, s, U[d], visit);  
        visit(g, d);  
    }  
}
```

Esercizi

- Scrivere una funzione `bool check_path(Grafo g, Node * n)` che ritorni `true` se il percorso rappresentato dalla lista concatenata `n` appartiene al grafo, `false` altrimenti.
- La lunghezza del percorso tra due vertici `s` e `t` rappresenta la distanza secondo quel percorso tra `s` e `t`. Scrivere una funzione `int get_distance(Grafo g, int s, int t);` che ritorni la distanza di un percorso tra `s` e `t` se tale percorso esiste, `-1` altrimenti.
- Scrivere una funzione che ritorni una lista corrispondente al percorso minimo tra due vertici `s` e `d`.
 - Hint: sfruttare la struttura della funzione `print_path`.
- Scrivere una funzione che ritorni `true` se il grafo non orientato su cui è invocata è connesso.
 - Hint: se il grafo è connesso esiste un percorso da ogni nodo ad ogni altro nodo. Quindi basta verificare che ogni vertice sia stato visitato applicando una visita ad un qualsiasi vertice del grafo.