

Inf Gen II

INFORMATICA GENERALE II
Ingegneria delle Telecomunicazioni
Università di Trento

Marco Roveri
roveri@irst.itc.it

Algoritmi di Ordinamento

AA 2006/2007
MR

Inf Gen II

Algoritmi di Ordinamento

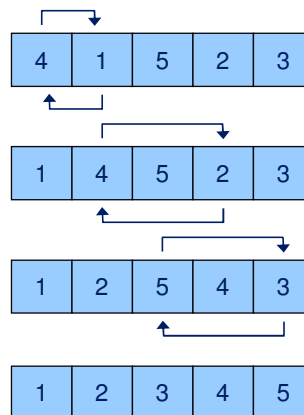
- Problema: dato un array di elementi (e.g. interi) riordinare gli elementi dell'array in modo che per ogni $1 \leq i \leq N - 1$, $A[i - 1] \leq A[i]$
- Esistono diversi algoritmi con diverse caratteristiche computazionali.
- Nel seguito analizzeremo gli algoritmi più utilizzati e ne discuteremo le caratteristiche.

AA 2006/2007
MR

2

Ordinamento per selezione

- Cerco elemento più piccolo dell'array e lo scambio con il primo elemento dell'array.
- Cerco il secondo elemento più piccolo e lo scambio con il secondo elemento dell'array.
- Proseguo in questo modo finché l'array non è ordinato.



Ordinamento per selezione

```
void selectionsort( int A[], int N) {
    for (int i = 0; i < N - 1; i++) {
        int min = i;
        for(int j = i + 1; j < N; j++)
            if (A[j] < A[min]) min = j
        swap(A[i], A[min]);
    }
}
```

Cerco elemento più piccolo nella parte di array ancora da ordinare.

Scambio elemento più piccolo trovato con il primo elemento dell'array ancora da ordinare.

Caratteristiche algoritmo ordinamento per selezione

- L'algoritmo di ordinamento per selezione effettua circa $n^2/2$ confronti ed n scambi in media.
- Il limite asintotico superiore è $O(n^2)$.

Ordinamento per inserzione

- È il metodo usato dai giocatori di carte per ordinare in mano le carte.
- Considero un elemento per volta e lo inserisco al proprio posto tra quelli già considerati (mantenendo questi ultimi ordinati).
 - l'elemento considerato viene inserito nel posto rimasto vacante in seguito allo spostamento di un posto a destra degli elementi più grandi.

Inf Gen II

Ordinamento per inserzione

AA 2006/2007

MR

7

Inf Gen II

Algoritmo per inserzione

```

void insertsort( int A[], int N) {
  for(int i = N - 1; i > 0; i--) // porto elemento più piccolo in A[0]
    if (A[i] < A[i-1]) swap(A[i], A[i-1]);
  for(int i = 2; i <= N - 1; i++) {
    int j = i;  int v = A[i];
    while( v < A[j-1] ) {
      A[j] = A[j-1]; j--;
    }
    A[j] = v;
  }
}

```

AA 2006/2007

MR

8

Inf Gen II

Caratteristiche algoritmo ordinamento per inserzione

- L'algoritmo di ordinamento per inserzione effettua circa $n^2/4$ confronti ed $n^2/4$ scambi in media.
- Il limite asintotico superiore è $O(n^2)$.

AA 2006/2007
MR

9

Inf Gen II

Algoritmo Bubble Sort

- Si basa su scambi di elementi adiacenti se necessari, fino a quando non è più richiesto alcuno scambio e l'array risulta ordinato.

AA 2006/2007
MR

10

Inf Gen II

Algoritmo bubblesort

AA 2006/2007

MR 11

Inf Gen II

Algoritmo bubblesort

AA 2006/2007

MR 12

Algoritmo bubblesort

```
void bubblesort(int A[], int N) {  
    for( int i = 0; i < N - 1; i++)  
        for( int j = N - 1; j > i; j--)  
            if (A[j] < A[j-1])  
                swap(A[j-1], A[j]);  
}
```

Caratteristiche algoritmo ordinamento bubblesort

- L'algoritmo di ordinamento bubblesort effettua circa $n^2/2$ confronti ed $n^2/2$ scambi in media.
- Il limite asintotico superiore è $O(n^2)$.

Merge di due array ordinati

- Problema: combinare due array ordinati $A[N]$ e $B[M]$ in un terzo array ordinato $C[N+M]$.
- Usiamo un ciclo for che ad ogni iterazione i inserisce un elemento in $C[i]$.
 - Se A si esaurisce prendiamo prossimi elementi da B;
 - Viceversa, se B si esaurisce prendiamo i prossimi elementi da A;
 - Se abbiamo elementi sia in A che in B, il prossimo elemento inserito i sarà il minore tra i due elementi $A[j]$ e $B[k]$, e incrementiamo il corrispondente indice.

Merge di due array ordinati

```
int * mergeArray(int A[], int N, int B[], M) {
  int * C = new int [M+N];
  for(int i = 0, j = 0, k = 0; k < M + N; k++) {
    if (i == N) {
      C[k] = B[j++]; continue;
    }
    if (j == M) {
      C[k] = A[i++]; continue;
    }
    if (A[i] < B[j])
      C[k] = A[i++];
    else
      C[k] = B[j++];
  }
  return C;
}
```

Allocazione array per il risultato.

A si è esaurito: riempio C con B

B si è esaurito: riempio C con A

Riempio C con elemento minore tra $A[i]$ e $B[j]$, incrementando opportuno indice.

$O(M + N)$

Merge di due array ordinati

```
void mergeArray(int A[], int N, int B[], M, int C[]) {  
    for(int i = 0, j = 0, k = 0; k < M + N; k++) {  
        if (i == N) {  
            C[k] = B[j++]; continue;  
        }  
        if (j == M) {  
            C[k] = A[i++]; continue;  
        }  
        if (A[i] < B[j])  
            C[k] = A[i++];  
        else  
            C[k] = B[j++];  
    }  
}
```

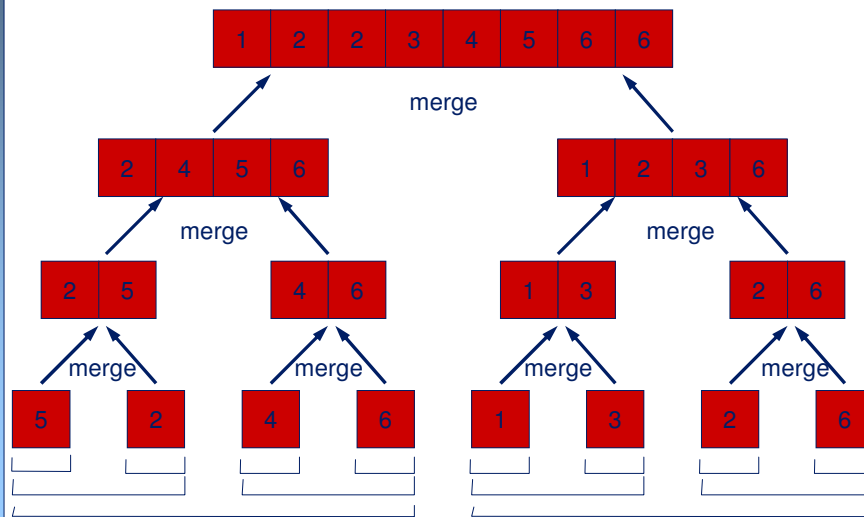
$O(M + N)$

Array per risultato passato come argomento. Deve avere dimensione per contenere tutti elementi di A e B.

Ordinamento MergeSort

- L'algoritmo MergeSort è un esempio tipico di programma ricorsivo di tipo *divide et impera*.
 - L'array $A[1] \dots A[N]$ è ordinato spezzando l'array in due parti $A[1] \dots A[m]$ e $A[m+1] \dots A[N]$, ordinandoli indipendentemente con la stessa tecnica.
 - Merging dei due risultati intermedi.

Algoritmo mergesort



19

Ordinamento MergeSort

```

void MergeSort(int A[], int n) {
    MergeSortAux(A, 0, n-1);
}

void MergeSortAux(int A[], int l, int r) {
    if (r <= l) return;
    int m = (r+l)/2;
    MergeSortAux(A, l, m);
    MergeSortAux(A, m+1, r);
    merge(A, l, m, r);
}
    
```

Ricorsione su sotto-array compreso tra indici l e m.

Ricorsione su sotto-array compreso tra indici m+1 e r.

Ordinamento MergeSort

```

void MergeSort(int A[], int n) {
    MergeSortAux(A, 0, n-1);
}

void MergeSortAux (int A[], int l, int r) {
    for(int m = 1; m <= r-l; m = m+m)
        for(int i = l; i <= r-m; i += m + m)
            merge(A, i, i+m-1, min(i+m+m-1, r));
}
    
```

Ordinamento MergeSort: merge

```

void merge(int A[], int l, int m, int r) {
    int i, j;
    int * aux = new int[r+1];

    for(i = m + 1; i > l; i--) aux[i-1] = A[i-1];
    for(j = m; j < r; j++) aux[m+(r-j)] = A[j+1];
    for(int k = l; k <= r; k++) {
        if (aux[j] < aux[i]) {
            A[k] = aux[j--];
        }
        else {
            A[k] = aux[i++];
        }
    }
    delete [] aux;
}
    
```

Assunzione: $l \leq m \leq r$

Copia degli elementi compresi tra l e m in aux, e elementi tra m e r in altra parte di aux.

Merge dei sotto-array di aux compresi tra l e m e tra m e r in A a partire da l.

Deallocazione di array ausiliario.

Caratteristiche algoritmo ordinamento mergesort

- L'algoritmo di ordinamento mergesort effettua circa $n \log(n)$ confronti per ordinare un qualunque array di dimensione n .
- Lo spazio ausiliario necessario per ridurre il numero di confronti è proporzionale a n .
- Il limite asintotico superiore è $O(n \log(n))$.

Algoritmo quicksort

- È un algoritmo di ordinamento del tipo *divide et impera*.
- Si basa su un processo di partizionamento dell'array in modo che le seguenti tre condizioni siano verificate:
 - Per qualche valore di i , l'elemento $A[i]$ si trova al posto giusto.
 - Tutti gli elementi $A[1], \dots, A[i-1]$ sono minori od uguali ad $A[i]$.
 - Tutti gli elementi $A[i+1], \dots, A[N]$ sono maggiori od uguali ad $A[i]$.
- L'array è ordinato partizionando ed applicando ricorsivamente il metodo ai sotto array.

Ordinamento quicksort

```
void quicksort(int A[], int N) {
    quicksort_aux(A, 0, N-1);
}

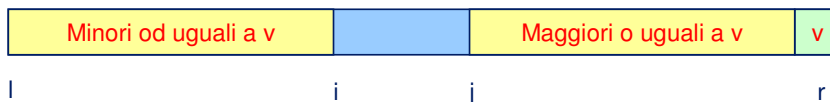
void quicksort_aux(int A[], int l, int r) {
    if (r <= l) return
    int i = partition(A, l, r);
    quicksort_aux(A, l, i-1);
    quicksort_aux(A, i+1, r);
}
```

Caratteristiche algoritmo ordinamento quicksort

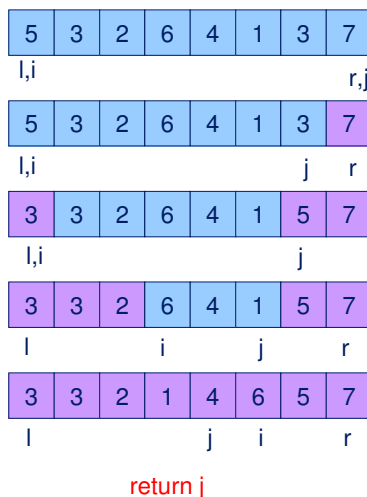
- L'algoritmo di ordinamento quicksort effettua circa $n \log(n)$ confronti in media per ordinare un qualunque array di dimensione n .
- Il limite asintotico superiore è $O(n \log(n))$.

Partizionamento dell'array

- Scegliamo arbitrariamente un elemento (e.g. $A[r]$), che chiameremo *pivot* (o *elemento di partizionamento*).
- Scandiamo l'array dall'estremità sinistra fino a quando non troviamo un elemento $A[i] \leq A[r]$.
- Scandiamo l'array dall'estremità destra fino a che non troviamo un elemento $A[j] \geq A[r]$.
- Scambiamo $A[i]$ e $A[j]$, e iteriamo.
- Procedendo in questo modo si arriva ad una situazione in cui gli elementi a sinistra di i sono minori di $A[r]$, mentre quelli a destra di j sono maggiori di $A[r]$.



Partizionamento dell'array



- Partizioniamo a partire da $A[1] = 5$.
- Gli elementi dell'array precedenti ad $A[j]$ sono minori od uguali a 5.
- Gli elementi dopo $A[j]$ sono maggiori od uguali a 5.

Partizionamento dell'array

```
int partition(int A[], int l, int r) {
    int i = l-1, j = r, v = A[r];
    while (true) { // ciclo infinito
        while (A[++i] < v);
        while (v < A[--j]) if (j == l) break;
        if (i >= j) break;
        swap(A[i], A[j]);
    }
    swap(A[i], A[r]);
    return(i);
}
```

Analisi delle prestazioni degli algoritmi di sorting

Algoritmo	Limite superiore asintotico
selezione	$O(N^2)$
inserimento	$O(N^2)$
bubblesort	$O(N^2)$
mergesort	$O(N \log(N))$
quicksort	$O(N \log(N))$

Algoritmo ShellSort

- La lentezza dell'algoritmo InsertSort risiede nel fatto che le operazioni di scambio avvengono solo tra elementi contigui.
 - Ad esempio se l'elemento più piccolo è in fondo all'array, occorrono N scambi per posizionarlo al posto giusto.
- Per migliorare questo algoritmo è stato pensato l'algoritmo ShellSort.
- L'idea è quella di organizzare l'array in modo che esso soddisfi la proprietà per cui gli elementi aventi tra loro distanza h costituiscono una sequenza ordinata, indipendentemente dall'elemento di partenza.
 - Se si applica l'algoritmo con una sequenza di h che termina con 1, si ottiene un file ordinato.

Algoritmo ShellSort

```
void ShellSort(int A[], int l, int r) {
    int h;
    for(h = 1; h <= (r-1)/9; h = 3*h+1);
    for( ; h > 0; h /= 3)
        for(int i = l+h; i <= r; i++) {
            int j = i; int v = A[i];
            while((j >= l + h) && (v < A[j-h])) {
                A[j] = A[j-h];
                j = j - h;
            }
            A[j] = v;
        }
    }
}
```


Algoritmo ShellSort

- L'algoritmo ShellSort esegue meno di $O(n^{3/2})$ confronti per come lo abbiamo realizzato.
- Il limite superiore asintotico è $O(n^{3/2})$.
- Usando sequenze particolari di h si possono ottenere prestazioni diverse (e.g. $O(n (\log n)^2)$).

Esercizi

- Esistono altri algoritmi di ordinamento?
- Trovarli e provare a implementarli, confrontandoli con quelli visti a lezione.